DOI https://doi.org/10.15407/csc.2022.01.032
УДК 519.816

Н.К. ТИМОФІЄВА, доктор технічних наук, пров. наук. співроб., Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН україни,
03187, м. Київ, просп. академіка глушкова, 40, україна

ЗНАКОВІ КОМБІНАТОРНІ ПРОСТОРИ, СКІНЧЕННІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ СПІРАЛІ

Знакові комбінаторні простори існують в двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці). Для біологічних, фізичних, інформаційних, мовленнєвих просторів виконуються аксіоми знакових просторів, тому вони мають комбінаторну природу. Їхнє використання дозволяє пояснити різні природні явища в природі. За їхньої допомоги можна пояснити динаміку мислення людини, що важливо при створенні штучного інтелекту. З використанням скінченних послідовностей, які утворюються при розгортанні цих просторів, та представленням їх елементів у полярних координатах, простежується динаміка утворення логарифмічних спіралей у природі.

Ключові слова: *знакові комбінаторні простори, логарифмічна спіраль, полярні координати, комбінаторна конфігурація, скінченні послідовності, фрактали.*

Вступ

У статті розглядаються знакові комбінаторні простори, які можуть перебувати у двох станах: згорнутому (спокої) та розгорнутому (динаміці). Простори, зокрема, біологічні, фізичні, інформаційні та деякі інші, для яких справедливими є аксіоми знакових комбінаторних просторів, мають комбінаторну природу. Під час їхнього розгортання утворюються комбінаторні числа (числа Фібоначчі), через які в живій природі проявляються логарифмічні спіралі [1]. Ці спіралі утворюються завдяки скінченним послідовностям, які мають місце під час розгортання обумовлених просторів і які подаються геометрично з використанням полярних координат.

Постановка задачі

Логарифмічна спіраль геометрично подається через “золотий прямокутник”, у якого одна сторона є довшою в 1,618 разів («золоте» число або золотий перетин). Присутність золотого перетину в природі проявляється через числа Фібоначчі, які утворюються з арифметичного трикутника, що виникає під час розгортання знакових комбінаторних просторів з елементів скінченних послідовностей. Але ця спіраль передається через «золотий прямокутник» опосередковано. Задача полягає в тому, щоб прослідкувати її утворення в природі завдяки побудованим послідовностям, елементи яких подаються через полярні координати.

Пропонований підхід

Використовуючи скінченні послідовності, які утворюються під час розгортання знакових комбінаторних просторів і представлення їхніх елементів у полярних координатах, можна прослідкувати динаміку утворення логарифмічних спіралей у природі.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою

Описані в літературі комбінаторні простори, як правило, зводять до метричних [2, 3]. Деякі автори вважають, що точками комбінаторного простору є рекурсивні функції [4]. У літературі також описано евклідові комбінаторні простори [5]. Метричні комбінаторні простори розглядаються як задана множина W, точками якої є комбінаторні конфігурації певного типу, між якими введено віддаль $r(x, y)$, $x, y \in W$, яка задовольняє трьом аксіомам метричного простору:

1. $r(x, y) = 0$ тоді і лише тоді, коли $x = y$;
2. $r(x, y) = r(y, x)$ (аксіома симетрії);
3. для будь-яких трьох елементів x, y та z $r(x, y) \le r(x, z) + r(z, y)$ (аксіома трикутника).

Віддалями між точками цього простору вважають результати, отримані з використанням операторів, завдяки яким утворюються комбінаторні об'єкти (транспозиція, вибирання тощо).

Але характерною особливістю комбінаторних просторів є не просто наявність заданої множини точок комбінаторного характеру, між якими введено віддаль, а утворення їх із елементів однієї або кількох базових множин з використанням певної системи правил. Щоб задати комбінаторний простір, достатньо ввести одну або кілька базових множин, із елементів яких формуються його точки, тип комбінаторної конфігурації та систему правил, за допомогою яких він розгортається.

Оскільки точками комбінаторного простору є комбінаторні конфігурації, розгляньмо їхнє утворення та впорядкування.

Комбінаторні конфігурації та комбінаторні множини

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів базової множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$ [6]. Позначмо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, ..., w_\eta^k)$, $w_s^k = a_l \in A$, $l \in \{1, ..., n\}$, $s \in \{1, ..., \eta^k\}$, $\eta \in \{1, ..., n\}$ — кількість елементів у w^k, $W = \{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, ..., q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W, q— кількість w^k у W. Рекурентним комбінаторним оператором назвімо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання $\alpha(A^0)$, $A^0 \subseteq A$; транспозиція $\alpha'(w_j^k, w_l^k)$, де $w^k = (w_1^k, ..., w_n^k)$ — перестановка; арифметичний $\alpha''(w_j^k - x_t, w_l^k + \tilde{x}_s)$, де $x_t, \tilde{x}_s \in \{1, ..., n-1\}$, $\sum_{j=1}^{p} x_j = \sum_{j=1}^{p'} \tilde{x}_j = x, x < n$, $\{w_j^k, w_l^k, x_t, \tilde{x}_s, x\} \in N$, $\{t, s, p, p'\} \in \{1, ..., n-1\}$.

Дві нетотожні комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо ізоморфними, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Якщо w^k і w^i складаються з підмножин (блоків), то вони є ізоморфними, якщо кількість їхніх підмножин є однаковою і для будь-якого блоку $\rho_j^k \subset w^k$ в комбінаторній конфігурації w^i знайдеться підмножина $\rho_t^i \subset w^i$, для якої $\xi_j^k = \xi_t^i$, де ξ_j^k, ξ_t^i – кількість елементів відповідно у підмножинах $\rho_j^k \subset w^k$ і $\rho_t^i \subset w^i$.

Підмножину $W_\eta \subset W$ назвімо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи є ізоморфними комбінаторними конфігураціями.

У множині W, елементи якої утворено кількома рекурентними комбінаторними операторами, виокремимо підмножину $W^* \subset W$, будь-який елемент якої утворюється одним типом рекурентних комбінаторних операторів, та підмножини $W^{**} \subset W$, комбінаторні конфігурації яких утворено з $w \in W^*$ іншим типом. Назвімо $W^* \subset W$ базовою підмножиною множини W.

Комбінаторні конфігурації можуть бути впорядковані й випадково (безладно), й за строгими правилами. Одним із таких правил є властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення $w^k \in W$ та полягає в тому, що їхні множини впорядковано інтервалами, в кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за тими самими правилами. Для генерування множин ком-

Таблиця 1. **Інтервали нульового рангу, σ-го рангу та обмежувальної комбінаторної конфігурації у множинах сполучень без повторень і в бінарних послідовностях**

№ п.п.	Спол. без повторень	бінарні послі-довності	ін-л 0-го рангу	ін-л 1-го рангу	ін-л 2-го рангу	ін-л 3-го рангу
0		0, 0, 0, 0, 0				
1.	1	1, 0, 0, 0, 0				
2	2	0, 1, 0, 0, 0				
3.	3	0, 0, 1, 0, 0	0			
4.	4	0, 0, 0, 1, 0				
5.	5	0, 0, 0, 0, 1				
6.	1,2	1, 1, 0, 0, 0				
7.	1,3	1, 0, 1, 0, 0	0			
8.	1,4	1, 0, 0, 1, 0				
9.	1,5	1, 0, 0, 0, 1				
10.	2,3	0, 1, 1, 0, 0				
11.	2,4	0, 1, 0, 1, 0	0	1		
12.	2,5	0, 1, 0, 0, 1				
13.	3,4	0, 0, 1, 1, 0	0			
14.	3,5	0, 0, 1, 0, 1				
15.	4,5	0, 0, 0, 1, 1	0			
16.	1,2,3	1, 1, 1, 0, 0				
17.	1,2,4	1, 1, 0, 1, 0	0			
18.	1,2,5	1, 1, 0, 0, 1		1		
19.	1,3,4	1, 0, 1, 1, 0	0			
20.	1,3,5	1, 0, 1, 0, 1			2	
21.	1,4,5	1, 0, 0, 1, 1	0			
22.	2,3,4	0, 1, 1, 1, 0	0			
23.	2,3,5	0, 1, 1, 0, 1		1		
24.	2,4,5	0, 1, 0, 1, 1	0			
25.	3,4,5	0, 0, 1, 1, 1	0	1		
26.	1,2,3,4	1, 1, 1, 1, 0	0			
27.	1,2,3,5	1, 1, 1, 0, 1		1	2	
28.	1,2,4,5	1, 1, 0, 1, 1	0			3
29.	1,3,4,5	1, 0, 1, 1, 1	0	1		
30.	2,3,4,5	0, 1, 1, 1, 1	0	1	2	
31.	1,2,3,4,5	1, 1, 1, 1, 1	0			

бінаторних конфігурацій використаймо рекурентно-періодичний метод, у якому реалізовано ці твердження [7]. Сформулюймо три правила, згідно з якими утворюються такі інтервали:

а) інтервал нульового рангу,

б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу),

в) інтервал σ-го рангу, де σ— кількість таких рангів.

Фрактальна структура комбінаторних множин

У процесі впорядкування комбінаторних конфігурацій з використанням властивості періодичності за допомогою обумовлених правил утворюється комбінаторна множина, яка містить у собі менші подібні підмножини, тобто вона є самоподібною, що є характерним для фрактальних структур. Наведімо приклади

Таблиця 2. **Інтервали нульового рангу, σ-го рангу та обмежувальної комбінаторної конфігурації у множині розбиттів числа**

№ п.п.	розбиття числа	ін-л 0-го рангу	ін-л 1-го рангу	ін-л 2-го рангу
1.	9			
2.	8,1			
3.	7,2	0		
4.	6,3			
5.	5,4			
6.	7,1,1			
7.	6,2,1	0		
8.	5,3,1			
9.	4,4,1		1	
10.	5,2,2	0		
11.	4,3,2			
12.	3,3,3	0		
13.	6,1,1,1			
14.	5,2,1,1	0		
15.	4,3,1,1		1	
16.	4,2,2,1	0		2
17.	3,3,2,1			
18.	3,2,2,2	0	1	
19.	5,1,1,1,1			
20.	4,2,1,1,1	0	1	
21.	3,3,1,1,1			2
22.	3,2,2,1,1	0		
23.	2,2,2,2,1	0	1	
24.	4,1,1,1,1,1	0		
25.	3,2,1,1,1,1		1	
26.	2,2,2,1,1,1	0		
27.	3,1,1,1,1,1 1	0	1	
28.	2,2,1,1,1,1,1			
29.	2,1,1,1,1,1,1,1	0		
30.	1,1,1,1,1,1,1,1,1	0		

множин сполучень без повторень, бінарних послідовностей і розбиття числа, які представлено в табл. 1 і 2. Ці множини впорядковані за описаними правилами *а, б, в*.

Згідно з властивістю самоподібності як видно із табл. 1 і 2, інтервал σ -го рангу впорядкованої множини W складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а останній — з інтервалів нульового рангу. Число n може набувати довільних значень, тому W для n фіксованого є скінченною, а для n довільного — нескінченною, тобто вона одночасно є скінченною та нескінченною. Підмножина W_η розміщень із повтореннями (або сполучень із повтореннями, розбиття n-елементної множини на підмножини з повтореннями) є скінченною, а множина W цих же комбінаторних конфігурацій для того самого n є нескінченною. Із цього випливає, що комбінаторні множини мають фрактальну природу.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а інтервал 1-го рангу — з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкування, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які є різними для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Для множини W, впорядкованої підмножинами $W_{\eta^k} \subset W$, зазначмо кількість комбінаторних конфігурацій у їхніх множинах у такому вигляді:

$$\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^1}\Big(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^1}\Big(\ldots\Big(\sum_{j_2=1}^{H_2^1}\Big(\sum_{j_1=1}^{H_1^1}(h^1)\Big)\Big)\ldots\Big)\Big)+\ldots+\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^{\tilde q}}\Big(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^{\tilde q}}\Big(\ldots$$

$$\ldots\Big(\sum_{j_2=1}^{H_2^{\tilde q}}\Big(\sum_{j_1=1}^{H_1^{\tilde q}}(h^{\tilde q})\Big)\Big)\ldots\Big)\Big), \qquad (1)$$

де H_t^s — кількість інтервалів σ-го рангу, $t \in \{1,\ldots,\sigma\}$, $\sigma \in \{2,\ldots,n\}$, h^s — кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу для s-ї підмножини $W_{\eta^k} \subset W$, $s \in \{1,\ldots,\tilde q\}$, $\tilde q$ — кількість підмножин $W_{\eta^k} \subset W$, $\sum_{j_\sigma=1}^{H_n^\xi}\Big(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{n-1}^\xi}\Big(\ldots$ $\ldots\Big(\sum_{j_2=1}^{H_2^\xi}\Big(\sum_{j_1=1}^{H_1^\xi}(h^\xi)\Big)\Big)\ldots\Big)\Big)$ — кількість комбінаторних конфігурацій у s-й підмножині $W_{\eta^k} \subset W$ або у множині перестановок).

Назвімо самоподібними комбінаторні множини, якщо кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалах нульового, відповідно і σ -го рангів є однаковою.

Назвімо квазісамоподібними комбінаторні множини, якщо кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалах нульового, відповідно і σ-го рангів є різною.

Назвімо структуру комбінаторної множини фрактальною, якщо вона утворюється за рекурентними правилами і якщо внаслідок цього отримуємо множини, які можна подати геометричними формами, найбільша з яких містить їхні зменшені копії. Таких однакових копій у комбінаторній множині може бути багато.

Оскільки фрактали ототожнюються з геометричними формами, то їхню розмірність розглядають з погляду топології. Це — дробна розмірність або розмірність подібності, що означає статистичну величину, яка говорить про те, наскільки повно фрактал заповнює простір, якщо збільшувати його у дрібніших деталях [8]. Дробна розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини є критичною розмірністю, за якої міра змінює своє значення з нуля на нескінченність. Вона досить природно визначає розмірність множини у метричному просторі та слугує мірою локального розміру набору чисел (тобто «простору»), беручи до уваги відстань між кожним з її елементів.

Комбінаторні множини не є метричними. Їхня фрактальна розмірність випливає зі способу свого впорядкування за певними правилами. Для цього достатньо задати базову множину, з елементів якої рекурентними комбінаторними операторами утворюються комбінаторні конфігурації певного типу, та правила їхнього впорядкування. Їхня фрактальна розмірність випливає зі способу утворення. Комбінаторні множини заповнюються комбінаторними конфігураціями певного типу. Тому для них фрактальною розмірністю назвімо кількість комбінаторних конфігурацій в утвореній за певними правилами комбінаторній множині, яку задамо виразом (1).

Аксіоми знакових комбінаторних просторів

Виходячи з утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сформулюймо аксіоми, яким задовольняють знакові комбінаторні простори [1].

1. Знакові комбінаторні простори існують у двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).

2. Згорнутий простір задається інформаційним знаком $\Re=<A, T, P, \Xi>$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A — одна або кілька базових множин, з елементів $a_{l_j} \in A_l \subset A$ яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $l \in \{1,\ldots,\tilde q\}$, $\tilde q$ — кількість базових множин; $\boldsymbol{T}$ – тип комбінаторного простору; P — система правил, за якою він розгортається (за строгими законами або хаотично); Ξ — правила згортання знакового простору.

Таблиця 3. **Арифметичний трикутник**

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

3. Утворення зі згорнутого простору розгорнутих комбінаторних просторів відбувається за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу. Розгортанню комбінаторного простору притаманна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

4. Згортання знакового простору певного типу відбувається з точок і одного, і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, із яких він згорнувся.

Якщо правила розгортання ґрунтуються на строгих законах, то знаковий розгорнутий комбінаторний простір є структурованим. Якщо правила розгортання простору не підпорядковані строгим законам, то розгорнутий простір утворюється безладно. Розгортанню комбінаторного простору притаманна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій. Зі згорнутого комбінаторного простору утворюються такі простори: частково розгорнуті, повні розгорнуті, однорідні, неоднорідні. Метричні, евклідові, рекурсивні простори — це розгорнуті знакові комбінаторні простори.

Утворення скінченних послідовностей при розгортанні знакових комбінаторних просторів

Як уже зазначено, характерною особливістю комбінаторних просторів є утворення заданої множини точок комбінаторного характеру з елементів однієї або кількох базових множин із використанням певної системи правил [1]. Як випливає з аксіом цих просторів, для їхнього задання достатньо ввести одну або кілька базових множин, із елементів яких формуються його точки, тип комбінаторної конфігурації та систему правил, за допомогою яких він розгортається.

При розгортанні знакового комбінаторного простору з використанням властивості періодичності [7], точкою якого є сполучення без повторень або розбиття n-елементної множини на підмножини, отримано числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, утворюють комбінаторні числа та являють собою біноміальні коефіцієнти, що утворюють арифметичний трикутник. Фігурними називають і многокутні числа, і коефіцієнти членів степенів бінома $(a+b)^n$. Із його коефіцієнтів складається арифметичний трикутник (трикутник Паскаля). $(a+b)^n$ [9] (табл. 3).

По косих лініях цього трикутника розташовані коефіцієнти перших (других, третіх тощо) членів степенів $(a+b)^n$.

Подамо їх у вигляді табл. 4.

Перший рядок і перший стовпець цієї таблиці становлять 1, 1, 1, 1, 1, 1,...,. Другий рядок і другий стовпець — числа

Таблиця 4. **Арифметичний трикутник, у рядках якого містяться скінченні послідовності**

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		
1	4	10	20	...			
1	5	15	...				

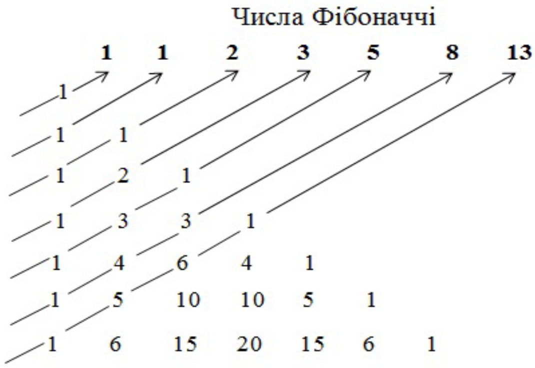

Рис. 1. Арифметичний трикутник і числа Фібоначі

натурального ряду: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Третій рядок і третій стовпець містить трикутні числа $1,3,6,10,15,21,...$, j-й елемент якого є сумою j перших чисел натурального ряду. Четвертий рядок і четвертий стовпець — числа 1,4,10,20,35,56,..., j-й елемент якого є сумою j перших значень трикутних чисел. Ці числа називають тетраедричними. П'ятий рядок і п'ятий стовпець містять числа, які називають п'ятикутними: 1,5,15,35,70,126,..., j-й елемент яких є сумою перших значень тетраедричних чисел, тощо. Будь-який елемент таблиці, крім чисел натурального ряду, є сумою двох чисел, що стоять у тому ж рядку ліворуч і в тому ж стовпці над шуканим числом.

Якщо записати рядки арифметичного трикутника один під другим, як показано на рис. 1 і скласти числа цієї таблиці по діагоналі (зліва направо, знизу вгору), то отримаємо послідовність чисел Фібоначчі [10]: 1, 1, 1+1=2; 1+2=3; 1+3+1=5; 1+4+3=8; 1+5+6+1=13.

Сформулюймо такі теореми [6].

Теорема 1. Значення послідовності, які задають кількість сполучень без повторень w у їхній множині W, що впорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Доведення здійснюємо для перших значень η для підмножини ізоморфних сполучень. Отримані результати дають змогу встановити певну закономірність структур цих послідовностей.

Для $\eta=1$ підмножина W_1 складається з одного інтервалу нульового рангу та містить усі можливі для нього нетотожні сполучення кількістю n.

Підмножина W_η для $\eta=2$ складається з одного інтервалу першого рангу, у який входять $n-1$ інтервали нульового рангу. Кількість w у ньому дорівнює $1+2+3+...+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}=$ $=\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}$. Аналогічно для $\eta=3$ підмножина W_3, побудована за тими ж правилами складається з одного інтервалу другого рангу, у який входять інтервали першого рангу, кожен із яких складається з $1,\ 2,\ 3\ ,...,n-3$ інтервалів нульового рангу. Тоді кількість w у W_3 дорівнює $1+3+6+10+...+\left(\dfrac{j\,(j+1)}{2}\right)_{n-2}=$ $=\dfrac{n(n-1)\,(n-2)}{6}=\dfrac{n!}{(n-3)!\,3!}$, $j\in\{1,...,\ n-2\}$. Відповідно, для $\eta=4$ W_4 складається з одного інтервалу третього рангу, у який входять $n-2$ інтервали другого рангу, кожен із яких складається з $1,\ 2,\ 3\ ,...,n-3$ інтервалів першого рангу, а останні — з $1,3,6,10\ ,...,\left(\dfrac{j\,(j+1)}{2}\right)_{n-3}$, $j\in\{1,...,n-3\}$, інтервалів нульового рангу. Тоді кількість w в W_4 дорівнює $1+4+10+$ $+20+...+\left(\dfrac{j\,(j+1)(j+2)}{6}\right)_{n-3}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=$ $=\dfrac{n!}{(n-4)!\ 4!}$. Для n кількість w у підмножині W_n дорівнює одиниці.

Із цього випливає, що одержані послідовності для $\eta=\{1,2,3,4,5,...\}$, суми членів яких задають кількість w у підмножинах W_η, утворюють арифметичний трикутник та є біноміальними коефіцієнтами, тобто для $n=\{0,1,2,3,4,5...\}$ відповідно маємо послідовності: 1; 1,1; 1,2,1, 1,3,3,1; 1,4,6,4,1; 1,5,10,10,5,1; ..., що й доводить теорему 1.

Розгляньмо множину розбиттів n-елементної множини на підмножини. Впорядкуймо цю комбінаторну множину за розробленими правилами з використанням рекурентно-періодичного методу для підмножин W_η, де η —

кількість підмножин $w_l \subset w$, на які розбивається базова множина $A=(a_1,...,a_n)$, ξ_l — кількість елементів у підмножині $w_l \subset w$, $l \in \{1...,\eta\}$.

Теорема 2. Значення послідовностей, які задають кількість розбиттів n-елементної множини на підмножини у їхній підмножині W_η для $\eta=2$, що впорядкована з використанням рекурентно-періодичного методу генерування комбінаторних конфігурацій [7], утворюють арифметичний трикутник та є фігурними числами.

Доведення здійснюємо для підмножини ізоморфних розбиттів W_η, при $\eta=2$ і перших значеннях ξ_1, ξ_2. Як і в теоремі 1, отримані результати дають змогу встановити певну закономірність структур цих послідовностей.

Для $\xi_1=n-1$, $\xi_2=1$ кількість розбиттів у підмножині W_2 дорівнює n.

Для $\xi_1=n-2$, $\xi_2=2$ кількість інтервалів σ-го рангу дорівнює $n-1$, а кількість інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу в кожному з них подамо послідовністю $1, 2, 3, ..., n-1$. Звідси кількість W у W_2 для $\xi_1=n-2$, $\xi_2=2$ дорівнює

$$1+2+3+...+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}=\frac{n!}{(n-2)!\,2!}.$$

Аналогічно для значень $\xi_1=n-3$, $\xi_2=3$ кількість інтервалів σ-го рангу складає $n-2$, а кількість w у W_2 дорівнює $1+3+6+10+$

$$+......+\left(\frac{j(j+1)}{2}\right)_{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=(=\frac{n!}{(n-3)!\,3!},\ j\in\{1,...,n-2\}.$$

Для $\xi_1=n-4$, $\xi_2=4$ кількість w у W_2 дорівнює $1+4+10+20+...\ ...+\left(\frac{j(j-1)(j-2)}{6}\right)_{n-3}=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=\frac{n!}{(n-4)!\,4!}.$$

Звідси, кількість розбиттів у підмножині W_2 для $\eta=2$ дорівнює $\frac{n!}{(n-j)!\,j!}$, що відповідає виразу $\frac{n!}{\xi_1!\,\xi_2!}$. Якщо $\xi_1=\frac{n}{2}$, $\xi_2=\frac{n}{2}$, то кількість w у W_2 дорівнює $\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!\,2!}$, $n\in\{2,4,...,2j\}$.

У результаті доведення отримуємо такі послідовності: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...; 1, 3, 6, 10, 15,

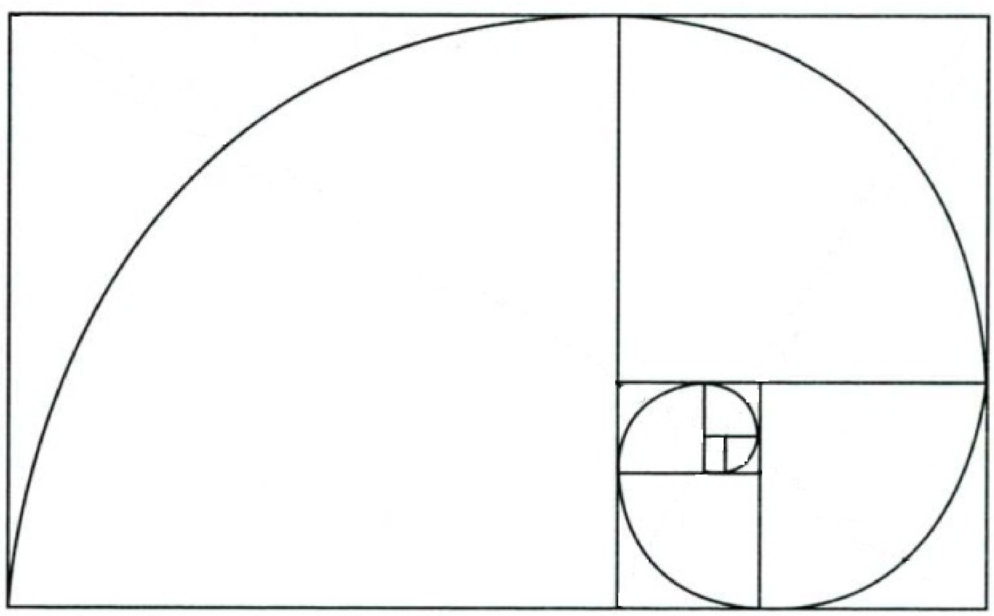

Рис. 2. Логарифмічна спіраль, вписана в «золотий прямокутник» [10]

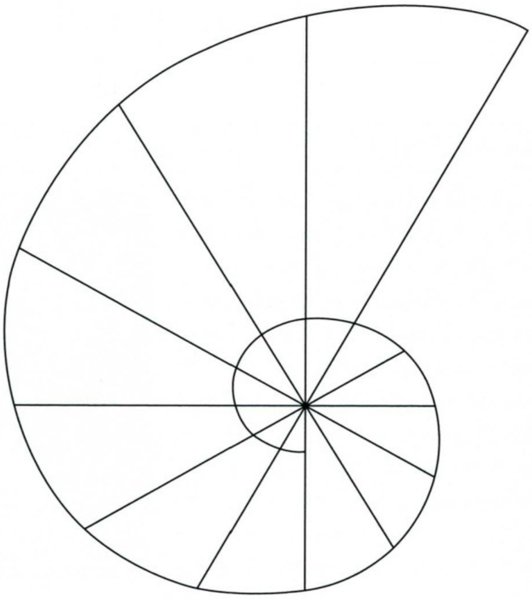

Рис. 3. Справжня логарифмічна спіраль [10]

21, ...; 1, 4, 10, 20, 35, 56,...., які утворюють арифметичний трикутник. Звідси випливає, що одержані послідовності для $\eta = 2$, та $\xi_1 = n - 1$, $\xi_2 = 1$, $A = (a_1, ..., a_n)$, $\xi_2 = 2$. $\xi_1 = n - 3$, $\xi_2 = 3$, $\xi_1 = n - 4$, $\xi_2 = 5$ і т.д. суми членів яких задають кількість W у підмножинах W_η, утворюють арифметичний трикутник.

Як було обумовлено раніше, одержані послідовності, суми членів яких задають кількість комбінаторних конфігурацій у підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля), що й доводить терему 2.

Під час росту мушель деяких видів молюсків утворюються логарифмічні спіралі. Рукава галактик, спіраль пелюстків розквітлої троянди утворюють логарифмічну спіраль, яку геометрично можна подати через «золотий прямокутник», у якого одна сторона є у 1,618 разів довшою («золоте» число або золотий перетин $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339887$). Відтинаємо в ньому квадрати й отримуємо менші «золоті прямокутники». Проведімо четвертину дуги кола в кожному квадраті. У такий спосіб отримуємо лінію, яка називається логарифмічною спіраллю (рис. 2).

Спіраль, вписана в золотий прямокутник, не є спіраллю, тому що її утворено дугами різних кіл, але вона є наближеною до логарифмічної спіралі (рис. 3).

Наявність золотого перетину в рослинах проявляється через числа Фібоначчі так:

1/1=1;
2/1= 2;
3/2=1,5;
5/3=1,666;
8/5=1,6;
13/8=1,625;
21/13=1,615348.

До сорокового числа результат збігається із золотим перетином (“золотим” числом) $\Phi = 1,6180339887$ [10].

Полярна система координат

Розгляньмо, як утворюється логарифмічна спіраль у полярних координатах.

Полярна система координат задається променем, який називають нульовим або полярною віссю [11]. Точка, з якої виходить цей промінь називається початком координат або полюсом. Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами: радіальною (радіусом) ρ та кутовою φ. Радіальна координата відповідає відстані від точки до початку координат. Кутова координата, що також зветься полярним кутом дорівнює куту між полярною віссю та напрямком на задану точку. Визначена в такий спосіб радіальна координата може набувати значення від нуля до нескінченності, а кутова координата змінюється в межах від 0° до 360°. Радіан — це одиниця вимірювання площинних кутів у Міжнародній системі одиниць *SI*. Один радіан — це площинний кут, утворений двома радіусами так, що довжина дуги між ними дорівнює радіусу кола і в градусах позначається як $180\pi \approx 57,296°$.

У деяких працях елементи скінченних послідовностей чисел подано через полярні координати [12]. У [12] їхнє представлення на поверхні утворює арифметичну спіраль (або спіраль Архімеда). Ця спіраль являє собою криву, яку описує точка під час її рівномірного руху із заданою швидкістю вздовж прямої, що рівномірно обертається у площині навколо однієї зі своїх точок. У полярних координатах її задають у вигляді: $\rho = a\omega$, де ω — кутова швидкість.

Логарифмічна спіраль у полярних координатах задається як $\rho = ae^{b\varphi}$ або $\varphi = \frac{1}{b}\ln(r/a)$, що пояснює назву логарифмічна, де ρ – відстань від точки O до точки M, φ – кут повороту променя, який обертається навколо точки O, відрізок a називається кроком спіралі зміщення точки M вздовж променя при повороті останнього на кут в один радіан.

Із теорем 1 і 2 випливає, що при розгортанні знакових комбінаторних просторів утворюються скінченні послідовності. Для елементів послідовності 1, 2, 3, 4, 5, 6,... визначмо полярні координати: для 1: (1,1), де перше число — відстань від початку координат до заданої точки, друге — кутова координата в радіанах; тобто дорівнює 1 радіан, для 2, 3, 4, 5, 6 відповідно координати: (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (5,5). (6,6). Якщо нанести точки з цими координатами на площину проти часової стрілки і з'єднати їх лінією, то отримаємо арифметичну спіраль (або спіраль Архімеда) (рис.2).

Розгляньмо послідовності 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...; та 1, 4, 10, 20, 35, 56,... . Задамо їх у полярних координатах: (1, 1), (3,2), (6,3), (10, 4), (15,5), (21, 6), відповідно (1, 1), (4,2), (10, 3), (20, 4), (35,5), (56, 6). Якщо побудувати криві на площині за годинниковою стрілкою, то вони набувають форми, як показано на рис. 3., тобто наближаються до логарифмічної спіралі.

Висновки

Отже, дослідження знакових комбінаторних просторів дозволяє пояснити різні явища в природі. Представлення інформаційних просторів як знакових комбінаторних дозволяє розділити їх на природні та штучні, а також пояснити динаміку мислення людини, що важливо при створенні систем штучного інтелекту. При розгортанні знакових комбінаторних просторів із згорнутого утворюються скінченні послідовності, суми членів яких задають кількість комбінаторних конфігурацій у підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій, утворюють арифметичний трикутник (трикутник Паскаля). Із арифметичного трикутника утворюються числа Фібоначчі, відповідно і золоте число. Логарифмічна спіраль вписується в золотий прямокутник. Динаміка утворення логарифмічної спіралі прослідковується завдяки утвореним в результаті розгортання знакових комбінаторних просторів скінченних послідовностей, елементи яких подано в полярних координатах.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Тимофієва Н.К.* Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. Штучний інтелект. 2015. 1-2(67–68). С.180–189.
2. *Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. К.: Наук. думка, 1981. 281 с.
3. *Бурдюк В.Я.* Дискретное метрическое пространство, ДГУ, 1982. 99 с.
4. *D. Skordev.* Recursion theory on iterative combinatory spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., S r Sci. Math. Astronom. Phys. 1976. 24, № 1. P. 23–31.
5. *Стоян Ю.Г.* Об одном отображении комбинаторных множеств в евклидово пространство. Харьков, 1982. 33 с. (Препринт АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 173).
6. *Тимофієва Н.К.* Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. Рукопис. ІК ім. В.М. Глушкова НАН України, К. 2007. 374 с.

7. *Тимофієва Н.К.* Використання властивості періодичності для генерування комбінаторних конфігурацій. Системи керування та комп'ютери (УСіМ, Control systems & computers). 2021, №1(291). С. 15–28. DOI https://doi.org/10.15407/csc.2021.01.015
8. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2010. 656 с.
9. *Депман И.Я.* История арифметики. М.: Госуд. учебно-педагогич. из-во Минист. просвещ. РСФСР, 1959. 423 с.
10. Мир математики: в 40 т. Т 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты. Пер. с англ. М.: Де Агостини, 2014. 160 с.
11. *Вірченко Н. О., Ляшко І. І.* Графіки елементарних та спеціальних функцій: Довідник. К.: Наукова думка, 1996. 584 с.
12. Почему простые числа образуют спирали? https://www.youtube.com/watch?v=DxntHp7-wbg (дата звернення: 5.05.2021).

Надійшла 02.06.2022

REFERENCES

1. *Tymofijeva N.K.* (2015) Znakovi kombinatorni prostory ta shtuchy'j intelekt Shtuchny`j intelekt, 67-68 (1–2). 180–189.
2. *Sergienko I. V., Kaspthitzkaja M. F.* Modeli i metodu reshenija na EVM kombinatornux zadath optimizatzii, Kiev: Nauk Dumka, 1981. 281 p.
3. *Burduk V.Ja.* Diskretnoje metritheskoje prostranstvo, DGU, 1982. 99 p.
4. *D. Skordev.* Recursion theory on iterative combinatory spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., S r Sci. Math. Astronom. Phys. 1976. 24, № 1. P. 23–31.
5. *Stojan Ju.G.* Ob odnom otobrajenii kombinatornyx mnojestv v evklidovo prostranstvo. Xarkov, 1982. 33 p. (Preprint AN USSR. In-t probl. mashinostrteija; 173).
6. *Tymofijeva N.K.* Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatornoij optymizatsiji. – Dysertatsija na zdobuttja naukovogo stupenja doktora texxnithnyx nauk za spetsialnistju 01.05.02 – matematythne modeljuvannja ta obthysljuvalni metody. Rukpys. IK im. V.M. Glushkova NAN Ukraijny, K. 2007. 374 p.
7. *Tymofijeva N.K.* Vykoystannja vlastyvosti periodythnosti dlja generuvannja kombinatornyx konfiguratsi'j. Systemy keruvannja ta kompjutery (USiM, Control systems & computers. 2021, №1(291). P. 15–28. DOI https://doi.org/10.15407/csc.2021.01.015.
8. *Mandelbrot B.* Fraktalnaja geometrija prirody. Ishevsk: NITS «Reguljartaja i xaotuthesraja dinamika», 2010. 656 p.
9. *Depman I.JA.* Istorija arifmetiki. M.: Gosud. uthebno-pedagogith. iz-vo Minist. prosvets. RSFSR, 1959. 423 p.
10. Mir matematiki: v 40 t. T 1: Fepnando Korbalan. Zolotoe sothenie. Matematitheski'j jazyk krasoty. Per. s angl. M.: De Agostini, 2014. 160 p.
11. V*irthnko N. O., Ljashko I.I.* Grafiky elementarnyx ta spetsialnyx funkshi'j: Dovidnyk. K.: Nauk. dumka, 1996. 584 p.
12. Pothemu prostye thisla obrazujut spirali. https://www.youtube.com/watch?v=DxntHp7-wbg (data obrashenija: 5.05.2021).

Received 02.06.2022

N.K. Tymofijeva, Doctor of Technical Sciences, Chief Researcher, International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of the NAS and MES of Ukraine,
Acad. Glushkova ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine
tymnad@gmail.com

SIGN COMBINATORIAL SPACES, FINITE SEQUENCES AND LOGARITHMIC SPIRALS

Introduction. Sign combinatorial spaces that exist in two states: convolute (tranquility) and deployed (dynamics), are considered. Spaces, in particular biological, physical, informational and some others, for which the axioms of sign combinatorial spaces, are valid, have a combinatorial nature. When they are deployed, combinatorial numbers (Fibonacci numbers) are formed, through which logarithmic spirals appear in living nature. These spirals are formed due to the finite sequences that take place during the deployment of the agreed spaces and which are presented geometrically using polar coordinates.

Formulation of the problem. The logarithmic spiral is geometrically represented through a "golden rectangle" in which one side is 1,618 times longer ("golden" number or golden section). The presence of the golden ratio in nature is manifested through Fibonacci numbers, which are formed from an arithmetic triangle from elements of finite sequences formed by the deployment of sign combinatorial spaces. But this spiral is transmitted through the "golden rectangle" indirectly. The problem is to trace its formation in nature through constructed sequences, the elements of which are represented by polar coordinates.

The approach proposed. Using the finite sequences that are formed during the unfolding of sign combinatorial spaces and the representation of their elements in polar coordinates, we can trace the dynamics of the formation of logarithmic spirals in nature.

Conclusion. Representation of biological space as a sign combinatorial space can explain various phenomena in nature. When unfolding these spaces from the convolute spaces finite sequences are formed, the sums of the members of which determine the number of combinatorial configurations in a subset of isomorphic combinatorial configurations and form an arithmetic triangle (Pascal's triangle). Fibonacci numbers and, accordingly, a golden number are formed from an arithmetic triangle. The logarithmic spiral fits into a golden rectangle. The dynamics of the formation of the logarithmic spiral is traced due to the finite sequences formed as a result of the deployment of the sign combinatorial spaces, the elements of which are presented in polar coordinates..

Keywords: *sign combinatorial spaces, logarithmic spiral, polar coordinates, combinatorial configuration, finite sequences, fractals.*