

# Фундаментальные и прикладные проблемы информатики и информационных технологий

---

DOI <https://doi.org/10.15407/usim.2018.02.003>

УДК 519.1

**М.Ф. СЕМЕНЮТА**, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры физико-математических дисциплин Летной академии Национального авиационного университета, Кропивницкий, Украина, [marina\\_semenyuta@ukr.net](mailto:marina_semenyuta@ukr.net)

**Д.Е. ГРИШМАНОВ**, командир воздушного судна-инспектор, Авиакомпания Атласджет, Кропивницкий, Украина, [di-sorry@ukr.net](mailto:di-sorry@ukr.net)

## О ПРИМЕНЕНИИ ГРАЦИОЗНОЙ РАЗМЕТКИ В MPLS-СЕТЯХ

---

*Рассмотрены графовые модели на основе грациозных разметок, используемые при решении оптимизационных задач в современных сетях передачи данных.*

**Ключевые слова:** грациозная разметка, остовное дерево, MPLS-технология.

### Введение

За 60 лет существования теории разметок интерес к этому направлению исследований не снижается. Разметки по типам можно разделить на грациозные, гармонические, магические и антимагические. Каждый из типов имеет несколько подтипов. Кроме этого, в обзоре «*A dynamic survey of graph labeling*» [1] представлены еще 28 разметок, не относящихся к этой классификации. Поэтому спектр их применения достаточно широк. Впервые систематизация практических интерпретаций размеченных графов выполнена в [2]. Современные тенденции развития теоретических и прикладных аспектов, связанных с грациозными графами, отображены в [3]. В данной статье остановимся на применении грациозной разметки специальных графов в MPLS-сетях.

Технология многопротокольной коммутации по меткам (*Multiprotocol Label Switching — MPLS*) — современная технология, стандартизованная целевой группой *Internet Engineering Task Force (IETF)* [4, 5], которая успешно

внедряется как в корпоративных сетях, так и в сетях общего пользования. Сегодня можно выделить три основные области применения MPLS: управление трафиком, поддержка классов и качества обслуживания и виртуальные частные сети [6]. Для передачи информации в сетях MPLS используют маршрутизаторы третьего уровня. Эти устройства выполняют две ключевые функции:

- *маршрутизация* — поддержка таблицы маршрутизации и обмен информацией об изменениях в топологии сети с другими маршрутизаторами;
- *коммутация* — перенаправление пакетов с входного интерфейса маршрутизатора на выходной интерфейс в зависимости от таблицы маршрутизации.

MPLS-сети — это сети с предварительным соединением, т.е. первоначально определяется маршрут, по которому будет передаваться совокупность пакетов. Любой передаваемый пакет ассоциируется с некоторым классом сетевого уровня, каждый из которых идентифицируется определенной меткой. Значение мет-

ки уникально лишь для участка пути между соседними узлами сети *MPLS*. Метка передается в составе любого пакета, а способ ее привязки к пакету зависит от используемой технологии канального уровня. Для пересылки пакетов применяется коммутация по меткам.

Далее речь пойдет о задаче построения оптимального остоного дерева, покрывающего все вершины сети, на основе двух метрик: задержки и количества переходов. Рассматриваются остовные деревья, имеющие топологию цепи и гусеницы при одно- и многоадресной маршрутизации в *MPLS*-сети соответственно. Кроме того, затронуты вопросы улучшения таких параметров, как время жизни пакета и надежность работы сети.

### Постановка задачи

Сеть моделируем обычным графом  $G = (V, E)$ , взвешенным в некоторой метрике маршрутизации, на котором выполняется поиск оптимального остоного дерева. Исходные данные таковы: множество маршрутизаторов — множество  $V$  сетевых узлов (вершин) и множество каналов связи — множество  $E$  ребер в графе  $G$ . Ребро характеризуется весом. Метрика, в которой определены веса ребер графа, отражает критерий эффективности для каждой отдельной задачи. Алгоритмы вычисления пути с одной метрикой — задержка или подсчет переходов, широко используются в большинстве существующих *IP*-сетей. В данной задаче предполагается, что задана одна из общих метрик сети — задержка. Будем использовать протокол маршрутизации с учетом состояния каналов, называемый также *алгоритмом выбора кратчайшего пути*, воссоздающий топологию сети на каждом маршрутизаторе. Одним из распространенных протоколов с указанными функциями является протокол *OSPF*, в результате работы которого можно получить не одно, а несколько остовных деревьев с одинаковым оптимальным весом.

Задача заключается в использовании дополнительной метрики — числа переходов в работе алгоритма поиска оптимального остоного

дерева. Ее реализация базируется на применении грациозной разметки в условиях, когда остовным деревом служит цепь или гусеница. Это позволит минимизировать число оптимальных остовных деревьев. Кроме того, необходимо провести исследования, предусматривающие разработку эффективного способа пересылки пакетов, который способствует улучшению показателей времени жизни пакета и повышению надежности работы сети. Под надежностью функционирования сети подразумеваем возможность быстрого устранения разрыва.

Данная статья является обобщением работы [7] и расширяет круг задач, решаемых посредством грациозной разметки для организации эффективной одно- и многоадресной маршрутизации *IP*-пакетов в *MPLS*-сети.

### Анализ исследований и публикаций

Основная идея *MPLS*-технологии состоит в том, чтобы маршрутизировать *IP*-пакеты с использованием значений их меток по непрерывному каналу (от входного маршрутизатора к выходному). В таком случае отпадает необходимость выполнения сложного алгоритма поиска маршрутов, основанного на *IP*-адресе назначения. Любой передаваемый пакет ассоциируется с тем или иным классом эквивалентности сетевого уровня (*Forwarding Equivalence Class — FEC*), каждый из которых идентифицируется определенной меткой. Значение метки уникально только для участка пути между соседними узлами сети *MPLS*, называемыми маршрутизаторами, коммутирующими по меткам (*Label Switching Router — LSR*). Метка передается в составе любого пакета и при его продвижении с входного интерфейса маршрутизатора на выходной номер метки изменяется. Маршрутизатор *LSR* получает топологическую информацию о сети, участвуя в работе алгоритма маршрутизации — *OSPF, BGP, «IS-IS»*. Затем он начинает взаимодействовать с соседними маршрутизаторами, распределяя метки, применяемые в дальнейшем для коммутации. Обмен

метками может осуществляться как с учетом специального протокола распределения меток (*Label Distribution Protocol — LDP*), так и модифицированных версий других протоколов. Распределение меток между *LSR* приводит к установлению внутри домена *MPLS*-путей с коммутацией по меткам (*Label Switching Path — LSP*).

Существуют разные подходы к оптимизации процесса передачи трафика по сети с функциями *MPLS*. Например, на уровне проектирования сетей с технологией *MPLS* следует учитывать многоуровневую структуру телекоммуникационных систем. Решение этой задачи предложено в [8–10] с применением структурного и параметрического синтеза сети и математической модели, представленной в виде многослойного графа. Задача определения мест расположения узлов с коммутацией пакетов и оптимизация виртуальной топологии сети, а также методы ее решения описаны в [11–13]. При многоадресной маршрутизации актуальной представляется проблема минимизации максимальной загруженности каналов связи, используемых в логических соединениях. Методы определения оптимальных маршрутов передачи информации при известных пропускных способностях каналов связи рассмотрены в [14, 15]. Возможности *MPLS* управлять всем трактом передачи пакета без специфицирования в явном виде промежуточных маршрутизаторов изучены в [16]. В этом случае математической моделью эффекта туннелирования выступает система массового обслуживания с последовательными очередями. Актуальными остаются проблемы оптимизации коммутационных систем на основе теории комбинаторного анализа и комбинаторной оптимизации [17]. Вопросы разработки технологии и аппаратно-программных средств организации защиты передачи потоковой мультимедийной информации в реальном времени рассмотрены в [18].

В данной статье рассмотрена задача оптимизации процесса передачи *IP*-пакетов в *MPLS*-сетях. Если не существует особой необходимости применения специального протокола распределения меток при маршрутиза-

ции в *MPLS*-сети, тогда метки могут быть неявно использованы специальной нумерацией узлов, которая, в свою очередь, облегчает создание уникальных меток для каналов связи. В работе [7] в качестве такой нумерации выступает грациозная разметка графа.

Выделим класс задач, образующих отдельное направление исследований в теории разметок графов. Пусть задан неориентированный граф  $G = (V, E)$ , не содержащий кратных ребер и петель, а также подмножества  $A, B$  множества целых чисел или натуральных чисел и коммутативная бинарная операция  $*$  на множестве  $B$ . Пусть каждая вершинная функция  $f: V \rightarrow A$  индуцирует такую реберную функцию  $f^*: E \rightarrow B$ , что  $f^*(uv) = f(u)*f(v)$  для каждого ребра  $uv \in E(G)$ , где в качестве бинарной операции  $*$  могут выступать следующие операции: сложение, умножение, сложение по модулю, вычитание по абсолютной величине. Необходимо свести к минимуму наибольшее целое число, соответствующее любой вершине графа  $G$ , например  $\alpha(V)$ . Основным вопросом является соотношение между  $\alpha(V)$  и  $|E(G)|$ .

История возникновения вершинных разметок, принадлежащих описанному классу задач, связана с гипотезой Г. Рингеля, который в 1963 г. предположил, что полный граф  $K_{2n+1}$  можно разложить на  $2n + 1$  подграфа, каждый из которых изоморфен данному дереву с  $n$  ребрами [19]. Для ее решения в 1966 г. определено четыре типа разметок:  $\rho$ -,  $\sigma$ -,  $\beta$ -, и  $\alpha$ -оценки [20]. Для  $\beta$ -оценки большую популярность приобрел термин «грациозная разметка», введенный в 1972 г. [21]. Наиболее полный обзор публикаций по разным типам разметок графов можно найти в ежегодно обновляемом электронном журнале [1].

## Решение

Инъективную функцию  $f: V \rightarrow N = \{1, 2, \dots, n\}$  считают *грациозной разметкой* графа  $G = (V, E)$  размера  $n - 1$ , если она индуцирует такую реберную разметку  $f^*: E \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , что  $f^*$  — биекция и  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$  для любых смежных вершин  $u, v \in V(G)$ . Граф  $G$  — *граци-*

озный, когда допускает грациозную разметку. Если вершинная разметка  $f$  грациозна для дерева  $T$ , то  $f$  представляет собой биекцию.

Известно, что любая цепь  $P_n$  имеет грациозную разметку. Обозначим через  $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  множество вершин  $P$ . Рассмотрим вершинную разметку  $f$  цепи  $P_n$ , заданную так:  $f(u_{2i-1}) = i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n/2$  при четном  $n$  и  $i = 1, 2, \dots, (n + 1/2)$  при нечетном  $n$ ;  $f(u_{2i}) = n - i + 1$ , где  $i = 1, 2, \dots, n/2$  при четном  $n$  и  $i = 1, 2, \dots, (n - 1/2)$  при нечетном  $n$ . Разметка  $f$  грациозна для  $P_n$ .

Под *гусеницей* будем понимать дерево, которое после удаления всех вершин степени один, преобразуется в цепь, называемую основанием (или стволом) гусеницы. Гусеницу на  $n$  вершинах обозначим  $T_n$ , а ее основание —  $P$ . Доказано, что каждая гусеница есть грациозным деревом. Для описания алгоритма построения грациозной разметки гусеницы дерево разделим на уровни. Пусть  $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$  — множество вершин основания  $P$  гусеницы  $T_n$  порядка  $n$ ,  $v_1, v_k$  — висячие вершины для  $P$  и  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . В качестве корня для гусеницы выберем висячую вершину, смежную  $v_1$ . Такие висячие вершины образуют *первый* уровень. Множество вершин первого уровня обозначим  $L_1$ . Висячие вершины, смежные  $v_2$ , расположены на *втором* уровне гусеницы и образуют множество  $L_2$ , на *третьем* уровне находятся вершины, смежные с третьей вершиной  $v_3$  основания  $P$  и составляют множество  $L_3$  и т.д. Таким образом, множеству  $L_i$  не принадлежат вершины основания  $P$  и  $|L_1| = \deg(v_1) - 1$ ,  $|L_k| = \deg(v_k) - 1$ ,  $|L_i| = \deg(v_i) - 2$ , где  $i = 2, 3, \dots, k - 1$  и  $\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_k)$  — степени вершин  $v_1, v_2, \dots, v_k$  в  $T_n$ , соответственно.

**Алгоритм.** Грациозная разметка гусеницы.

**Шаг 1.** Висячей вершине — корню гусеницы или, возможно, вершине-корню гусеницы поставить в соответствие метку 1. Наименьшие из чисел множества  $N - \{1\}$  назначить остальным вершинам из  $L_1$  в произвольном порядке, а наибольшее число из  $N - \{1\}$  — вершине  $v_1$ . Удалить использованные числа из

множества  $N$  и обозначить полученное множество  $N(L_1)$ .

**Шаг 2.** Наименьшее из чисел в  $N(L_1)$  назначить  $v_2$ . Использовать  $|L_2|$  наибольших чисел из  $N(L_1)$  в качестве меток вершин  $L_2$ , распределив эти числа между вершинами множества  $L_2$  произвольно. Удалить использованные числа из  $N(L_1)$  и обозначить  $N(L_1 \cup L_2)$  — множество оставшихся чисел.

**Шаг 3.** Использовать  $|L_3|$  наименьших чисел из  $N(L_1 \cup L_2)$ , распределив эти числа между вершинами  $L_3$  произвольно. Наибольшее из чисел  $N(L_1 \cup L_2)$  назначить  $v_3$ . Удалить использованные числа из  $N(L_1 \cup L_2)$  и обозначить  $N(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$  — множество оставшихся чисел.

**Шаг 4.** Повторить аналогичный процесс назначения меток другим вершинам гусеницы, чередуя сначала шаг 2, а затем шаг 3.

**Шаг 5.** Если всем вершинам гусеницы назначены метки, алгоритм завершен.

Выполнение алгоритма приводит к порождению взаимно однозначного соответствия между множествами  $V$  и  $N$ . Метки ребер гусеницы находим как абсолютную величину разности меток смежных вершин. Индуцированное множество меток ребер  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  удовлетворяет условию грациозности.

Как отмечалось ранее, рассматривается сервис, предоставляемый сетевым уровнем, ориентированный на виртуальное соединение, т.е. весь путь от маршрутизатора—отправителя до маршрутизатора—получателя устанавливается до начала передачи каких-либо пакетов данных в MPLS-сети. Основная функция сетевого уровня заключается в выборе маршрута от конечного узла к начальному, в соответствии с используемой метрикой. К общим метрикам на основе ограничений относятся: подсчет переходов, пропускная способность, надежность, задержка, джиттер, денежная стоимость. Алгоритмы маршрутизации выбирают маршруты, оптимизирующие один или несколько этих показателей. Пусть определена метрика на графе  $G = (V, E)$ , при которой  $d(i, j)$  — вес ребра  $(i, j)$ . Метрики можно разделить на три класса. Для любого пути  $P = (i, j, k, \dots, l, m)$  метрика  $d$  является: адди-

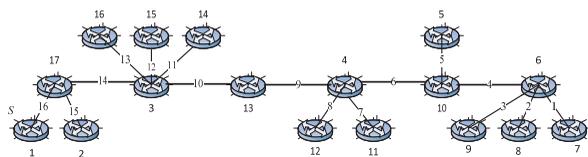
тивной, если  $d(P) = d(i, j) + d(j, k) + \dots + d(l, m)$ ; мультипликативной, если  $d(P) = d(i, j) * d(j, k) * \dots * d(l, m)$ ; вогнутой, если  $d(P) = \min\{d(i, j), d(j, k), \dots, d(l, m)\}$ . Известная теорема о маршрутизации с ограничениями заключается в том, что вычисление оптимальных маршрутов с ограничениями двух или более аддитивных и/или мультипликативных показателей является  $NP$ -полной [22]. Однако методы поиска маршрутов с ограничениями ширины полосы пропускания и подсчета числа переходов намного проще [23] и используют алгоритм Беллмана–Форда, или алгоритм Дейкстры. В настоящей статье авторы исследуют вопрос пересылки пакетов в MPLS-сети при условии, что в алгоритме маршрутизации задействованы две метрики: минимальная задержка пакета и подсчет числа переходов. Опишем основные этапы реализации процесса.

На первом этапе на основе полной топологической карты сети, моделируемой графом  $G = (V, E)$ , вычисляется остовное дерево минимального веса. Для этого может быть применен протокол OSPF, определяющий маршрут наименьшей стоимости в заданной метрике — минимальная задержка. Далее в действие вступает алгоритм грациозной разметки, назначающий маршрутизаторам метки, которые в свою очередь порождают метки каналов связи. Метки маршрутизаторов применяются для коммутации. Каждый маршрутизатор LSR содержит таблицу коммутации меток, которая ставит в соответствие паре «входной интерфейс, входная метка» тройку — «класс эквивалентности пересылки FEC, выходной интерфейс, выходная метка». Входной и выходной интерфейсы LSR при грациозной разметке получают метки, равные меткам соответствующих каналов связи, а выходная метка совпадает с меткой маршрутизатора, на который направляется пакет. Использование грациозной разметки при построении остовного дерева, взвешенного в описанной метрике, позволяет его дополнительно оптимизировать по числу переходов.

**Одноадресная маршрутизация.** При такой MPLS-маршрутизации решение задачи сво-

дится к назначению меток узлам магистрального пути минимальной стоимости на основе алгоритма грациозной разметки цепи от источника к адресату. Эта разметка индуцирует уникальные метки каналов в порядке убывания от  $n - 1$  к единице, начиная от исходного узла к узлу назначения. Маршрутизаторы LSR используют метки каналов LSP при пошаговом способе определения маршрута (*hop-by-hop*). Фактически, значение метки канала, когда узлы LSP грациозно (и неявно) пронумерованы, оказывается числом переходов, оставшихся для достижения целевого узла, т.е. выходного LSR. При использовании грациозной разметки для каждого FEC, натуральные числа  $\{1, 2, \dots, n\}$  можно масштабировать с применением целочисленной константы  $k$ , не меняя свойство индуцированных номеров каналов. В этом случае входной узел получает номер  $k$ . Кроме этого, для каждого маршрутизатора LSR доступно количество узлов к месту назначения, так как они получают топологическую информацию о сети, участвуя в работе алгоритма маршрутизации OSPF. Таким образом, время жизни пакета можно принять равным числу узлов плюс некоторая константа, ориентированная на задержку передачи пакета. Если цепь претерпевает разрыв, то несложно по соответствующей метке определить узел, в котором произошла потеря пакета. Общее количество уникальных грациозных меток зависит от максимальной длины LSP от входного LSR к выходному LSR, разрешенных в домене MPLS.

**Многоадресная маршрутизация.** При такой маршрутизации в сети с топологией гусеницы алгоритм грациозной разметки позволяет узлу гусеницы индуцировать метки инцидентных ему ребер. В свою очередь метки узлов генерируются входным узлом  $S$ , имеющим метку один. Следовательно, можно совместить поиск ребра минимального веса и назначение грациозных меток его вершинам. Также грациозная разметка гусеницы, реализуемая алгоритмом, описанным выше, позволяет получить сведения о количестве узлов на магистральном пути, а значит, и о числе переходов.



Грациозная разметка MPLS-сети с топологией гусеницы

Время жизни пакета определяется по аналогии с одноадресной маршрутизацией, но для всяких узлов гусеницы оно равно числу магистральных узлов, плюс константа, плюс единица. Авторы работы [7] предлагают модифицировать поиск оптимальной пересылки пакетов таким образом, чтобы на первом этапе находить магистральный путь минимальной длины, а на втором — необходимые узлы достигать через узлы этого пути. Но тогда нельзя гарантировать, что результирующим остовным деревом будет гусеница. Поэтому смежные узлы для каждой магистральной вершины следует искать на локальном уровне. Пример грациозной остовой гусеницы  $T_3$  представлен на рисунке. Вершины с метками 1, 17, 3, 13, 4, 10, 6 расположены на магистральном пути — основании  $P$  гусеницы  $T_3$ .

Остановимся на многоадресной рассылке, осуществляемой членам некоторой группы. Предположим, что заданная сеть  $G$  состоит из  $k$  автономных подсетей  $AN_1, AN_2, \dots, AN_k$  порядка  $n_1, n_2, \dots, n_k$  соответственно, каждая из которых имеет топологию гусеницы. Рассмотрим вершину  $S$  (источник) в  $AN_1$ . Топология сети  $G = AN_1 \cup AN_2 \cup \dots \cup AN_k$  может не быть гусеницей с вершиной  $S$ . В этом случае невозможно гарантировать, что метка исходного узла будет наименьшей. Поэтому узлы  $G$  обозначаются так: вершинам  $AN_i$  ставятся в соответствие метки  $\{1, 2, \dots, n_i\}$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Чтобы гарантировать уникальность меток, для каждой подсети  $AN_i$  вводится индекс  $i$  так, что ребру  $xu \in E(AN_i)$  ставится в соответствие метка  $f(x, y) = \{ij\}$ , где  $j = |f(x) - f(y)|$ .

При использовании протокола PIM-SM, значительной проблемой будет концепция наличия точки рандеву (RP). Для PIM-SM требуется, по крайней мере, одна общая точка

(маршрутизатор), которая сохраняет информацию о группах и источниках. Сначала приемникам не нужно знать местоположение источника, чтобы функционировать, поскольку адрес RP распределяется по всему домену. Когда получатель хочет присоединиться к группе  $AN_i$ , он отправляет IGMP-сообщение ее членам со своего первого маршрутизатора, а тот, в свою очередь, в RP. Аналогично, когда источник хочет начать передачу в группу, его маршрутизатор DR (Designated Route) инкапсулирует и перенаправляет многоадресные данные в RP. Поскольку все эти функции имеют место на магистральном пути остовой гусеницы, то существенным будет выбор или размещение точек RP для каждой подсети  $AN_i$ . Проблема по ряду других критериев надежности, связности и другим параметрам, представляет собой сложную задачу оптимизации комбинаторного графа. Однако поскольку топология многоадресного дерева — гусеница, можно выбрать в качестве RP один из центроидов на магистрали гусеницы [7]. Таким образом, будет минимизировано среднее расстояние потоков данных по протоколу PIM-SM.

Следующий актуальный вопрос — это присоединение или удаление членов группы. Его решение возможно с применением алгоритма перенумерации вершин грациозной гусеницы. Пусть остовная гусеница  $T_n$  порядка  $n$  имеет грациозную разметку  $f$ . Предположим, что вершина  $x_{n+1}$  соответствует новому члену группы. Добавление ребра  $(x_b, x_{n+1})$  приводит к гусенице  $T_{n+1} = T_n + (x_b, x_{n+1})$ , где  $x_b$  — вершина магистрального пути. Обозначим  $N(x_i)$  — множество смежности вершины  $x_i$ . Построим новую вершинную разметку  $f^*$  для  $T_{n+1}$ :

- $f^*(x_{n+1}) = \max\{f(x_j)\} + 1$ ,
  - если  $[n/2] + 1 \leq f(x_b) \leq n$  и  $f^*(x_{n+1}) = \min\{f(x_j)\}$ ,
  - если  $1 \leq f(x_b) \leq [n/2]$ , где  $x_j \in N(x_b)$ ;
  - $f^*(x_i) = f(x_i) + 1$ , если  $f(x_i) \geq f^*(x_{n+1})$ ;
  - $f^*(x_i) = f(x_i)$ , если  $f(x_i) < f^*(x_{n+1})$ ,
- где  $x_i, x_j \in V(T_n)$ .

Вершинная разметка  $f^*$  представляет собой биекцию из множества вершин дерева  $T_{n+1}$  в

множество чисел  $1, 2, \dots, n, n + 1$  и порождает реберную разметку, удовлетворяющую условию грациозности. Аналогично действуем при удалении члена группы.

Преимущество использования этой разметки заключается в проведении простых операций, и нет необходимости использовать достаточно сложные таймеры, как в протоколе IGMPv3.

В качестве графического инструмента мониторинга многоадресной маршрутизации в режиме реального времени в [24] предложено использовать грациозный код. Грациозный код  $GC(T)$  для  $n$ -вершинного дерева  $T_n$  представляет собой  $(n - 2)$ -кортеж меток вершин,  $k$ -я метка в коде обозначается  $GC(T)_k$  и равна  $\min(f(u), f(v))$ , где  $(u, v) \in E(T)$ ,  $|f(u) - f(v)| = k$ ,  $1 \leq k \leq n - 2$ . Висячая вершина с наименьшей меткой единица и инцидентное ей ребро с наибольшей меткой считаются известными и неявно заданными. Грациозный код для гусени-

цы на рисунке имеет вид:  $GC(T) = (6, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$ . Не все грациозные коды однозначно соответствуют деревьям, но для дерева гусеницы грациозный код однозначен. После того, как остоновая гусеница задана соответствующим грациозным кодом, он восстанавливает гусеницу пошагово от последней вершины на магистрали гусеницы.

## Заключение

Рассмотренный метод предусматривает надежную транспортировку пакетов для реализации безопасной и удобной работы виртуальных частных сетей. Эти свойства связаны с использованием различных меток для каждого класса эквивалентности сетевого уровня. Результирующие действия приводят к упрощению подсчета числа переходов, а также влияют на улучшение показателей времени жизни пакета и повышают надежность работы сети.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. The electronic j. of combinatorics, 2017, DS6, 415 p.
2. Bloom G.S., Golomb S. W. Applications of numbered undirected graphs. Proc. of the IEEE, 1977, 4, N 65, P. 562–570.
3. Донець Г.П., Петренко Д.А. Граціозні нумерації дерев: монографія, К.: Б.И., 2017, 144 с.
4. Олвейн В. Структура и реализация современной технологии MPLS, М., СПб, К.: Вильямс, 2004, 480 с.
5. Таненбаум Э., Уэзеролл Д. Компьютерные сети, СПб.: Питер, 2012, 960 с.
6. Гольдштейн А.Б., Гольдштейн Б.С. Технология и протоколы MPLS, СПб: БХВ-Петербург, 2014, 304 с.
7. Arkut I.C., Arkut R.C., Chani N. Graceful label numbering in optical MPLS networks. Proc. of the SPIE, 2000, 423, P. 1–8.
8. Dahl G., Martin A., Stoer M. Routing through virtual paths in layered telecommunication Networks. Operations Research, 1999, 47, P. 693–702.
9. Knippel A., Lardeux B. The Multi-layered network design problem. Europ. J. of Operational Research, 2007, 138, P. 87–99.
10. Агеев Д.В. Структурный и параметрический синтез наложенной сети IP/MPLS поверх сети WDM с применением модели, представленной в виде многослойного графа. Проблемы телекоммуникаций, 2012, № 3(8), С. 3–23.
11. MPLS over transport network: two layers approach to network design with statistical multiplexing, P. Belotti, A. Capone, G. Carello et al. Conf. on Next Generation Internet Design and Engineering (NGI 2006), Valencia, 2006, P. 308–318.
12. De Maesschalck S., Pickavet M. Multi-layer traffic grooming in networks with an IP/MPLS layer on top of a meshed optical layer. Global Telecommunications Conf., GLOBECOM '03, Washington: IEEE, 2003, P. 2750–2754.
13. MPLS over WDM network design with packet level QoS constraints based on ILP models, L. Gouveia, P. Patricio, A.F. de Sousa R. Valadas. IEEE INFOCOM, 2003, 1, P. 576–586.
14. Chen S., Gunluk O., Yener B. The multicast packing problem. IEEE/ACM Trans. on Networking, 2000, 8, Issue 3, P. 311–318.
15. Charikar M., Naor J., Schieber B. Resource optimization in QoS multicast routing of real-time multimedia. IEEE INFOCOM, 2000, 12, Issue 2, P. 1518–1527.
16. Гольдштейн А.Б. Исследование механизма туннелирования мультимедийного трафика в сети MPLS: Дис. ... канд. техн. наук: 05.12.13: Санкт-Петербург, 2004, 128 с.
17. Тимофієва Н.К. Про оптимізацію конструкції координатного комутатора. Математичні машини і системи, 2005, № 1, С. 84–92.
18. Технология системной интеграции аппаратно-программных средств защиты потоковой информации на базе нераскрываемых шифров, Н.И. Алишов, А.Н. Алишов, А.Я. Бойко, Н.А. Бойко и др. Системи обробки інформації, 2016, № 3, С. 7–10.
19. Ringel G. Problem 25. Theory of graphs and its applications, Proc. Symp. Smolenice 1963, Nakl. CSAV, Praha, 1964, P. 162.

20. *Rosa A.* On certain valuations of the vertices of a graph. *Theory of Graphs, Int. Symp. Rome, 1966, Gordon and Breach, N. Y. and Dunod Paris, 1967, P. 349–355.*
21. *Golomb S.W.* How to number a graph. *Graph Theory and Computing, Ed. R.C. Read., Acad.Press, New York, 1972, P. 23–37.*
22. *Wang Z., Crowcroft J.* Quality of service routing for supporting multimedia applications. *IEEE J. on Selected Areas in Communications, 1996, 14, N 7, P. 1228–1234.*
23. *Томас М. Томас II* Структура и реализация сетей на основе протокола OSPF, М.: Вильямс, 2004, 816 с.
24. *Arkut I.C., Arkut R.C., Basak A.* Topology constrained label switching for multicast routing. *Proc. of the Eighth IEEE Symposium on Computers and Communications. ISCC 2003. 3 July 2003. Turkey: IEEE. v.1. P. 453 – 459.*

Поступила 08.05.2018

## REFERENCES

1. *Gallian J.A.* A dynamic survey of graph labeling, *The electronic journal of combinatorics, 2017. DS6, 415 p.*
2. *Bloom G.S., Golomb S.W.* Applications of numbered undirected graphs, *Proc. of the IEEE, 1977, 4, N 65, P. 562–570.*
3. *Donets G.P., Petrenyuk D.A.* Graceful numbering of trees: Monograph. Kiev, S.N., 2017, 144 p. (In Ukrainian).
4. *Olvein V.* Structure and implementation of modern MPLS technology: Trans. from English, Moscow, St. Petersburg, Kiev: Williams, 2004, 480 p. (In Russian).
5. *Tanenbaum A., Wetherall D.* Computer networks. 5 th ed., SPb.: Peter, 2012, 960 p. (In Russian).
6. *Goldstein A.B., Goldstein B.S.* MPLS Technology and protocols. St. Petersburg: BKhV-Petersburg, 2014, 304 p. (In Russian).
7. *Arkut I.C., Arkut R.C., Chani N.* Graceful label numbering in optical MPLS networks, *Proc. of the SPIE, 2000, 423, P. 1–8.*
8. *Dahl G., Martin A., Stoer M.* Routing through virtual paths in layered telecommunication Networks, *Operations Research, 1999, 47, P. 693–702.*
9. *Knippel A., Lardeux B.* The Multi-layered network design problem, *Europ. J. of Operational Research, 2007, 138, P. 87–99.*
10. *Ageev D.V.* Structural and parametric synthesis of a superimposed network IP/MPLS over a network WDM using a model represented as a multilayer graph, *Electronic scientific specialized edition, J. "Problems of telecommunications", 2012, № 3 (8), P. 3–23.*
11. *MPLS over transport network: two layers approach to network design with statistical multiplexing / P. Belotti, A. Capone, G. Carello et al., Conf. Next Generation Internet Design and Engineering (NGI 2006)., Valencia, 2006, P. 308–318.*
12. *De Maesschalck S., Pickavet M.* Multi-layer traffic grooming in networks with an IP/MPLS layer on top of a meshed optical layer, *Global Telecommunications Conf., GLOBECOM'03, Washington: IEEE, 2003, P. 2750–2754.*
13. *Gouveia L., Patricio P., de Sousa A.F., Valadas R.* MPLS over WDM network design with packet level QoS constraints based on ILP models, *IEEE INFOCOM, 2003, 1, P. 576–586.*
14. *Chen S., Gunluk O., Yener B.* The multicast packing problem, *IEEE/ACM Trans. on Networking, 2000, Vol. 8, Issue 3, P. 311–318.*
15. *Charikar M., Naor J., Schieber B.* Resource optimization in QoS multicast routing of real-time multimedia, *IEEE INFOCOM, 2000, 12, Issue 2, P. 1518–1527.*
16. *Goldstein A.B.* Investigation of the tunneling mechanism for multimedia traffic in the MPLS network. For the academic degree of Cand. tech. Sciences: 05.12.13: St. Petersburg, 2004, 128 p. (In Russian).
17. *Timofieva N.K.* On optimization of the design of the coordinate switch, *Mathematical machines and systems, 2005, № 1, P. 84–92. In Ukrainian).*
18. *Technology of system integration of hardware and software protection means of streaming data based of unbreakable ciphers, N.I. Alishov, A.N. Alishov, A.J. Boyko, N.A. Boyko et al., Information processing systems, 2016, № 3, P. 7–10. In Ukrainian).*
19. *Ringel G.* Problem 25, *Theory of graphs and its applications, Proc. Symp. Smolenice 1963, Nakl. CSAV, Praha, 1964, P. 162.*
20. *Rosa A.* On certain valuations of the vertices of a graph, *Theory of Graphs, Int. Symp., Rome, 1966, Gordon and Breach, N.Y. and Dunod Paris, 1967, P. 349–355.*
21. *Golomb S.W.* How to number a graph, *Graph Theory and Computing. (ed. R.C. Read), Acad. Press, New York, 1972, P. 23–37.*
22. *Wang Z., Crowcroft J.* Quality of service routing for supporting multimedia applications, *IEEE J. on Selected Areas in Communications, 1996, 14, N 7, P. 1228–1234.*
23. *Thomas M. Thomas II* The structure and implementation of networks based on the protocol OSPF, 2 th ed.: Trans. from English, M.: Williams, 2004, 816 p. (In Russian).
24. *Arkut I.C., Arkut R.C., Basak A.* Topology constrained label switching for multicast routing. *Proc. of the Eighth IEEE Symposium on Computers and Communications. ISCC 2003. 3 July 2003. Turkey: IEEE. v.1. P. 453 – 459.*

Received 08.05.2018

*Marina Semeniuta*, PhD in Phys.-Math. Sciences, associate professor Department of Physics and Mathematics Sciences of the Flight Academy of the National Aviation University, st. Dobrovolsky, 1, Kropivnitsky, 25005, Ukraine, marina\_semenyuta@ukr.net

*Dmytro Gryshmanov*, Captain-inspector, Limited liability company Aircompany Atlasjet Ukraine, Stolychne Hwy. 103, Business Center "Europe", 5th Floor Kyiv, 03131, Ukraine, di-sorry@ukr.net

## ON THE APPLICATION OF GRACEFUL LABELLING IN MPLS NETWORKS

**Introduction.** There are different approaches to optimizing the process of traffic transmission over a network with MPLS functions. For example, at the design level of networks with MPLS technology, it is important to take into account the multilevel structure of the telecommunication systems. With multicast routing, the task of minimizing the maximum congestion of communication channels used in logical connections is of current interest. In this paper, we consider the problem of optimizing the process of IP packet transmission using MPLS technology.

**Purpose.** To conduct studies to optimize the process of traffic transmission over the network with MPLS functions.

**Methods.** Based on the complete topological map of the network, modeled by the graph  $G=(V, E)$ , a spanning tree of minimum weight is calculated. For this purpose, the OSPF protocol can be applied, which determines the route of the lowest cost in the given metric – the minimum delay. Next comes the graceful labelling algorithm, which assigns tags to the routers, which in their turn generate the labels of the communication channels. Joining or deleting members of a group with multicast routing is implemented using the algorithm of renumbering vertices of a graceful caterpillar.

**Results.** Development of an effective packet forwarding method that would improve the packet lifetime parameters and increase the reliability of the network operation.

**Conclusion.** The considered method provides the reliable transportation of packages for safe realization and virtual private networks convenient work. These properties are associated with the use of the different labels for each equivalence class of the network layer. The resulting actions result in a simpler counting of the number of transitions, and also affect the improvement of the packet lifetime parameters and increase the reliability of the network operation.

**Keywords:** graceful labelling, spanning tree, MPLS-technology.

*М.Ф. Семенюта*, канд. фіз.-мат. наук, професор кафедри фізико-математичних дисциплін Львівської авіац. ун-ту, м. Кропивницький, пров. Ботанічний, 12, marina\_semenyuta@ukr.net

*Д.Є. Гришманов*, командир повітряного судна-інспектор, Авіакомпанія Атласджет Україна, м. Кропивницький, вул. Преображенська 8, кв. 27, di-sorry@ukr.net

## ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ГРАЦІОЗНОЇ РОЗМІТКИ У MPLS-МЕРЕЖАХ

**Вступ.** Існують різні підходи до оптимізації процесу передачі трафіку у мережі з функціями *MPLS*. Наприклад, на рівні проектування мереж з технологією *MPLS* важливо враховувати багаторівневу структуру телекомунікаційних систем. Для багатоадресної маршрутизації актуальною є задача мінімізації максимальної завантаженості каналів зв'язку. У даній статті розглянуто задачу оптимізації процесу передачі *IP*-пакетів при використанні *MPLS*-технології.

**Мета статті.** Провести дослідження, яке передбачає розробку ефективного способу пересилання пакетів, що сприяє поліпшенню показників часу життя пакета і підвищенню надійності роботи мережі.

**Методи.** На основі повної топологічної карти мережі, що моделюється графом  $G=(V, E)$ , обчислюється кістякове дерево мінімальної ваги. Для цього може бути застосований протокол *OSPF*, який визначає маршрут найменшої вартості в заданій метриці – мінімальна затримка. Далі активізується алгоритм граціозної розмітки, що призначає маршрутизаторам мітки, які в свою чергу породжують мітки каналів зв'язку. Приєднання або видалення учасників групи при багатоадресній маршрутизації реалізовано за використання алгоритму перенумерації вершин граціозної гусениці.

**Результат.** Розроблено ефективний спосіб транспортування пакетів, що сприяє поліпшенню показників часу життя пакета і підвищенню надійності роботи мережі.

**Висновок.** Розглянутий метод передбачає надійне транспортування пакетів для реалізації безпечної та зручної роботи віртуальних приватних мереж. Ці властивості пов'язані з використанням різних міток для кожного класу еквівалентності мережевого рівня. Результуючі дії ведуть до спрощення підрахунку числа переходів і впливають на поліпшення показників часу життя пакета та підвищують надійність роботи мережі.

**Ключові слова:** граціозна розмітка, остонове дерево, *MPLS*-технологія.