

Е.Ф. Перлов

## Некоторые аспекты динамики переходных процессов поворотного рабочего элемента под воздействием упругих и вязкоупругих сил

Получена математическая модель динамики поворотного рабочего элемента, работающего на высоких скоростях с ускорениями, и выполняющего при этом высокоточную координатную ориентацию. Поворотный рабочий элемент рассмотрен как звено системы автоматического регулирования.

**Ключевые слова:** поворотный рабочий элемент, динамика, разгон–торможение, дифференциальное уравнение, система автоматического регулирования.

Отримано математичну модель динаміки поворотного робочого елемента, який працює на високих швидкостях з прискоренням. Елемент виконує високоточну координатну орієнтацію. Поворотний робочий елемент розглянуто як ланку системи автоматичного регулювання.

**Ключові слова:** поворотний робочий елемент, динаміка, розгон–гальмування, диференціальне рівняння, система автоматичного регулювання.

**Введение.** Данная статья – логическое продолжение статей [1, 2], целью которых было рассмотрение некоторых аспектов динамики переходных процессов поворотного рабочего элемента, действующего без упругих и вязкоупругих сил [1], статья [2] дополнена действием упругих сил. В предлагаемой статье схема сил, действующих на поворотный рабочий элемент, дополнена действием вязкоупругих сил.

### Математическая модель переходных процессов

Рассмотрим уравнение движения поворотного рабочего элемента, исходя из силовых воздействий на этот рабочий элемент (рис. 1).

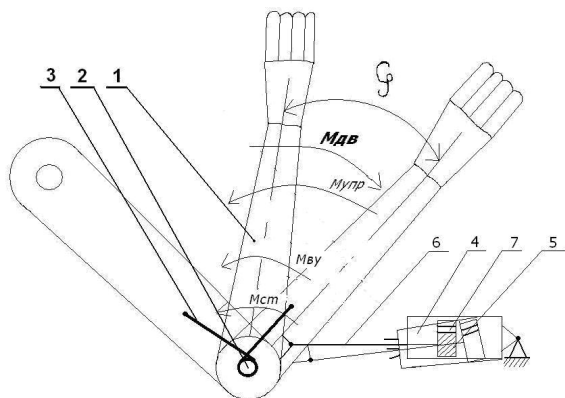


Рис. 1: 1 – поворотный рабочий элемент, 2 – ось его поворота, 3 – упругий элемент (пружина кручения), 4 – вязкоупругий элемент (пневматический демпфер – пневмо-цилиндр с поршнем 5, штоком 6, соединенным с элементом 1, дроссельное отверстие 7, которое может быть выполнено регулируемым по величине его проходного сечения).

Поворотный рабочий элемент находится под действием создаваемого двигателем кру-

тящего момента  $M_{дв}$  и противодействующих ему момента диссипативных сил (трения)  $M_{см}$ , момента от действия упругого элемента  $M_{упр}$  и момента от действия вязкоупругих сил  $M_{ву}$ . Пружина кручения установлена так, что в свободном (не деформированном) состоянии она удерживает рабочий элемент в исходном (нейтральном) положении. Вязкоупругий элемент начинает противодействовать двигателю только при движении поворотного рабочего элемента. Уравнение движения поворотного рабочего элемента имеет вид:

$$I_{\Sigma} \varepsilon = M_{\Sigma}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение поворотного рабочего элемента,  $I_{\Sigma}$  – суммарный приведенный к оси поворота момент инерции поворотного рабочего элемента,  $M_{\Sigma}$  – суммарный крутящий момент, действующий на рабочий элемент, который может быть представлен в виде

$$M_{\Sigma} = M_{дв} - M_{см} - M_{упр} - M_{ву}. \quad (2)$$

Отметим, что

$$M_{упр} = c\zeta, \quad (3)$$

где  $c$  – жесткость пружины кручения,  $\zeta$  – угол поворота рабочего элемента,

$$M_{ву} = v\dot{\zeta}, \quad (4)$$

где  $v$  – коэффициент вязкоупругого сопротивления.

Отметим также, что  $M_{упр}$  действует как в статике, так и в динамике, в то время как  $M_{ву}$  действует только в динамике.

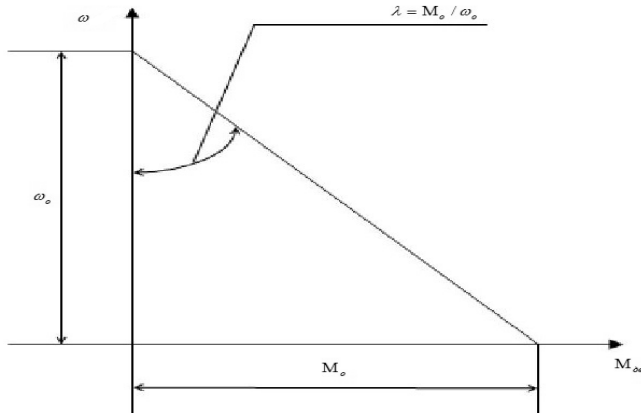


Рис. 2

Учитывая необходимость создания математической модели поведения поворотного рабочего элемента, а также то, что характеристики двигателей  $M_{дв} = f(\omega)$ , как правило, не имеют четкой математической зависимости, было предложено аппроксимировать характеристику двигателя в виде уравнения в отрезках [1]. Тогда эта характеристика может быть представлена в виде:

$$M_{дв} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0}\right)M_0 = (\omega_0 - \omega)\lambda, \quad (5)$$

где  $M_0$  – пусковой момент двигателя,  $\omega_0$  – угловая скорость холостого хода;

$\lambda = M_0 / \omega_0$  – жесткость характеристики двигателя. (6)

Учитывая (2) – (6), уравнение движения поворотного элемента можно записать в виде

$$I_{\Sigma} \ddot{\zeta} + (\lambda + \nu)\dot{\zeta} + c\zeta = M_0 - M_{ct}; \quad (7)$$

получено неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид

$$\zeta = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \zeta_K, \quad (8)$$

$$p_1 = \sigma + \Omega, \quad p_2 = \sigma - \Omega, \quad (9)$$

где корни характеристического уравнения получены на основании (7);

частное решение уравнения (7)

$$\zeta_K = \frac{1}{c}(M_0 + M_{cm}); \quad (10)$$

$K_1, K_2$  – постоянные, определяемые из начальных условий (НУ);

постоянная затухания [3]

$$\sigma = -\frac{\lambda + \nu}{2I_{\Sigma}}; \quad (11)$$

собственная круговая частота поворотного рабочего элемента [3]

$$\Omega = \frac{\sqrt{D}}{2I_{\Sigma}}; \quad (12)$$

дискриминант характеристического уравнения

$$D = (\lambda + \nu)^2 - 4I_{\Sigma}c. \quad (13)$$

Формально можно рассмотреть как в [1,2] все три случая корней характеристического уравнения:

1.  $D > 0$ , т.е. корни  $p_1$  и  $p_2$  – действительные отрицательные числа. В этом случае переходные процессы поворотного рабочего элемента разгона–торможения обрабатываются по экспоненциальным кривым.

2.  $D = 0$ , т.е.  $p_1 = p_2 = \sigma$  – также действительное отрицательное число и переходные процессы, как и в первом случае, подчиняются экспоненциальным законам;

3.  $D < 0$ , т.е.  $p_1$  и  $p_2$  – комплексные числа и переходные процессы имеют колебательный характер.

Однако демпфер специально устанавливается для недопущения (гашения) колебаний, а это значит, что третий случай рассматривать нецелесообразно.

*Случай 1.  $D > 0$ :* корни  $p_1$  и  $p_2$ , как отмечено ранее, – действительные отрицательные числа. Решение уравнения (7) при  $D > 0$  может быть получено после определения постоянных  $K_1$  и  $K_2$ , которые могут быть найдены из НУ для режимов разгона и торможения.

### Режим разгона

Введем НУ. Строго придерживаясь (8), движение поворотного рабочего элемента осуществляется по экспоненциальному закону (сумма двух экспонент). Отсюда – вывод, что угловая скорость, т.е. производная от угла поворота рабочего элемента, касательная к экспоненте в точке при  $t = 0$ , будет максимальной. С другой стороны, также очевидно, что в момент начала поворота угловая скорость равна нулю.

Исходя из этого несоответствия можно сделать вывод:  $\zeta(t)$  в начале движения должна иметь участок с углом подъема касательной, равным нулю (горизонтальный участок), а затем начинается восхождение поворотного рабочего элемента по экспоненте. Величина этого горизонтального участка может изменяться от нескольких долей секунды до нескольких секунд в зависимости от крутящего момента привода, момента инерции поворотного элемента и диссипативных сил.

Итак, НУ при разгоне:  $t = 0, \zeta = 0, \dot{\zeta} = 0$ .

В выражениях (10) и (11) «+» является знаком алгебраической суммы, так как при разгоне  $M_{cm}$  и в препятствует активному воздействию (крутящему моменту двигателя) и, следовательно, должно входить со знаком «-», а при торможении  $M_{cm}$  и в способствует этому воздействию и поэтому должно входить со знаком «+».

Из (8) получим:

$$K_1 = -(K_2 + \zeta_K). \quad (14)$$

Продифференцируем (8):

$$\dot{\zeta} = p_1 K_1 e^{p_1 t} + p_2 K_2 e^{p_2 t}. \quad (15)$$

С учетом (14) и НУ получим постоянные  $K_1$  и  $K_2$ :

$$K_1 = \frac{p_2 \zeta_K}{p_1 - p_2} = \frac{p_2 \zeta_K}{2\Omega}, \quad (16)$$

$$K_2 = -\frac{p_1 \zeta_K}{p_1 - p_2} = -\frac{p_1 \zeta_K}{2\Omega},$$

и тогда уравнение (8) движения поворотного элемента в режиме разгона будет иметь вид:

$$\zeta = \zeta_K (1 - C e^{p_2 t}), \quad (17)$$

где  $C = \frac{p_1}{2\Omega} (1 - \gamma e^{2\Omega t})$ ;  $\gamma = \frac{p_2}{p_1}$ .

Уравнение (8) можно представить как сумму двух экспонент  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ , где

$$\zeta_1 = \zeta_K + K_2 e^{p_2 t} = \zeta_K (1 - \Delta e^{p_2 t}); \quad (18)$$

$$\zeta_2 = K_1 e^{p_1 t}, \quad \Delta = \frac{p_1}{2\Omega}, \quad K_1 - \text{см. (16)}.$$

Учитывая, что  $\zeta$  и  $\zeta_K$  – действительные положительные величины,  $p_1$  и  $p_2$  – отрицательные, причем  $|p_1| < |p_2|$ ,  $K_1 < 0$ ,  $K_2 > 0$ , следует: кривая  $\zeta_2$  убывает более интенсивно, нежели кривая  $\zeta_1$  нарастает, что находит отображение на графике движения поворотного рабочего элемента в режиме разгона (рис. 3).

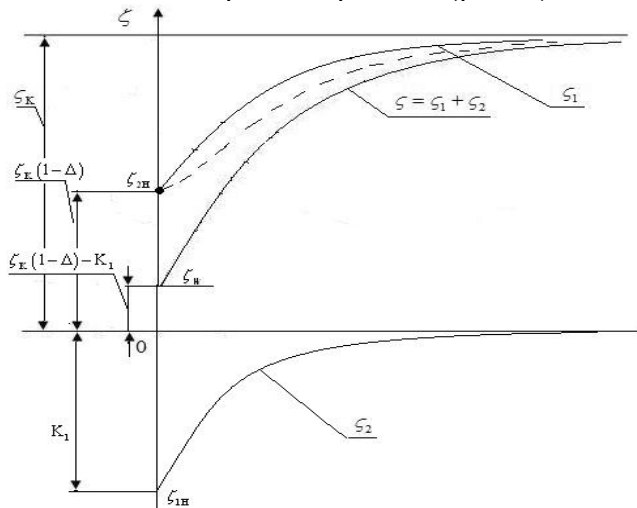


Рис. 3

Определим начальные точки кривых  $\zeta$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ . Начальная точка кривой  $\zeta_{2Н}$  очевидна: при  $t = 0$ ,  $\zeta_{2Н} = K_1$ . Для определения начальной точки кривой  $\zeta_1$  – точки  $\zeta_{1Н}$  преобразуем (18)

$$\zeta_1 = \zeta_K \left( 1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right) = \zeta_K \left( 1 - \frac{1}{1 - \gamma} e^{p_2 t} \right),$$

т.е.  $\Delta = \frac{1}{1 - \gamma}$ .

Отсюда видно (с учетом  $|p_2| < |p_1|$ , а  $\gamma = \frac{p_2}{p_1}$ ),

что  $\gamma > 1$ ,  $\frac{1}{1 - \gamma} = \Delta < 0$ ,  $(1 - \Delta) > 0$ , а начало кривой  $\zeta_1$  при  $t = 0$  исходит из точки  $\zeta_{1Н} = \zeta_K (1 - \Delta)$ .

Начальной точкой подъема результирующей кривой  $\zeta = \zeta_H$  при  $t = 0$  является точка

$$\zeta_H = \zeta_K (1 - \Delta) - K_1 = \zeta_K \left( 1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} - \frac{p_2}{p_1 - p_2} \right) = -\frac{\zeta_K p_2}{\Omega} > 0 \quad \text{или (что то же самое)} \quad \zeta_H = \frac{\zeta_K |p_2|}{\Omega}.$$

Как видно из рис. 3, движение поворотного рабочего элемента в режиме разгона, несмотря на принятое допущение в НУ  $\dot{\zeta} = 0$ , по-прежнему, как и в [1, 2], подчиняется экспоненциальному закону, т.е. в НУ  $\dot{\zeta} = \omega_{\max}$ . Следовательно, для удовлетворения условию  $\dot{\zeta} = 0$  необходимо ввести некоторый горизонтальный участок в начальной части кривой  $\zeta(t)$  в виде кривой, изображенной пунктирной линией. Начало кривой  $\zeta(t)$  восходит не из начала координат, а из ординаты  $\zeta_H = \zeta_K (1 - \Delta) - K_1$ , что объясняется действием диссипативных сил и в связи с этим поворотный рабочий элемент не достигает начала координат в исходном положении.

Полученный результат переходного процесса разгона при  $D > 0$  позволяет сделать следующие выводы:

- согласно (8) разгон происходит по экспоненциальному закону, причем независимо от того, принимаются ли НУ при  $t = 0$   $\dot{\zeta} = 0$  или при  $t = 0$   $\dot{\zeta} \neq 0$ ;

- в соответствии с (10) чем больше активное воздействие на поворотный рабочий элемент (крутящий момент двигателя, характеризующийся величиной  $\lambda$ ), тем больше коэффициент затухания  $\sigma$  и, следовательно, более активно нарастает кривая разгона;

- чем больше сопротивление от сил трения и вязкоупругих сил, входящее в (10) и (11) со знаком +, тем сильнее препятствуют они разгону: ниже располагается начальная точка восхождения кривой  $\zeta(t)$  (точка  $\zeta_H$ ), (из (16) следует, что  $K_1$  с уменьшением  $\zeta_K$  уменьшается более интенсивно, чем уменьшение  $K_2$ , так как  $|p_2| > |p_1|$ ) снижается, а это означает, что для достижения заданного угла поворота требуется больше времени;

- чем больше жесткость пружины (коэффициент упругого сопротивления  $c$ ), тем меньше вторая составляющая корней  $p_1$  и  $p_2$  – дискриминант  $D$ ; а это приводит к увеличению модуля корня  $p_2$  и уменьшению корня  $p_1$ , т.е. более крутая экспонента от  $p_2$  компенсируется более пологой экспонентой от  $p_1$ , а это значит, что

устанавливать жесткую пружину нецелесообразно: жесткость пружины должна быть такой, чтобы надежно фиксировать поворотный рабочий элемент в нейтральном положении.

### Режим торможения

НУ: при  $t = 0$ ;  $\zeta = \zeta_T$ ;  $\dot{\zeta} = \omega_T$  – параметры начала торможения.

НУ введем в (8) и (15), получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} \zeta_T = K_1 + K_2 + \zeta_K \\ \omega_T = p_1 K_1 + p_2 K_2 \end{cases},$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\omega_T - p_2 (\zeta_T - \zeta_K)}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_T - p_2 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega}; \\ K_2 &= -\frac{\omega_T - p_1 (\zeta_T - \zeta_K)}{p_1 - p_2} = -\frac{\omega_T - p_1 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим  $K_1$  и  $K_2$  в (8) и после преобразований получим:

$$\begin{aligned} \zeta &= e^{p_2 t} \left[ \frac{p_1 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega} (1 - \gamma e^{2\Omega t}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_T}{2\Omega} (1 - e^{2\Omega t}) \right] + \zeta_K, \end{aligned} \quad (20)$$

или, без преобразований

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\omega_T - p_2 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega} e^{p_1 t} - \\ &\quad - \frac{\omega_T - p_1 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega} e^{p_2 t} + \zeta_K. \end{aligned} \quad (21)$$

Выражение (21) для  $\zeta(t)$  более удобно при графическом представлении кривой торможения, поскольку эта кривая является результатом сложения двух экспонент плюс постоянная составляющая  $\zeta_K$ :  $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_K$ ,

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= K_1 e^{p_1 t} = \frac{\omega_T - p_2 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega} e^{p_1 t}; \\ \zeta_2 &= K_2 e^{p_2 t} = -\frac{\omega_T - p_1 (\zeta_T - \zeta_K)}{2\Omega} e^{p_2 t}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $p_1$  и  $p_2 < 0$ ,  $|p_1| < |p_2|$ , следует:  $|K_1| > |K_2|$ , кривая  $\zeta_2$  убывает более ин-

тенсивно, нежели кривая  $\zeta_1$ , а результирующая кривая  $\zeta(t)$  плавно приближается к значению  $\zeta_K$  (рис. 4).

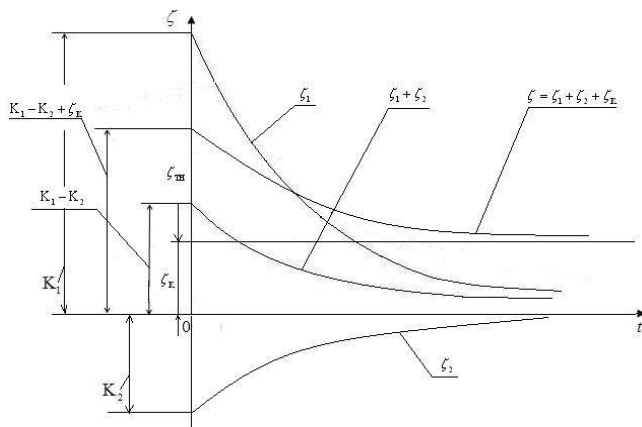


Рис. 4

Все выводы по разделу разгона применимы к данному разделу с той разницей, что, как отмечено выше, при разгоне статика препятствует ему, а при торможении – способствует: чем больше  $\zeta_K$ , тем меньше согласно (19)  $K_1$  и  $K_2$ , следовательно, исходная точка начала торможения  $\zeta_{TH}$  станет ниже, а процесс торможения завершится быстрее.

Случай 2.  $D = 0$ :  $p_1 = p_2 = \sigma$ , а общее решение уравнения (7) имеет вид [3]:

$$\zeta = (K_1 + K_2 t) e^{\sigma t} + \zeta_K = K_1 e^{\sigma t} + t K_2 e^{\sigma t} + \zeta_K. \quad (22)$$

### Режим разгона

Из НУ (при  $t = 0$ ,  $\zeta = 0$ ,  $\dot{\zeta} = 0$ ), выполнив вычисления, аналогичные изложенным, получим для режима разгона:

$$\begin{cases} 0 = K_1 e^{\sigma t} + t K_2 e^{\sigma t} + \zeta_K \\ 0 = \sigma K_1 e^{\sigma t} + K_2 e^{\sigma t} + \sigma t K_2 e^{\sigma t} \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = K_1 + \zeta_K \\ 0 = \sigma K_1 + K_2 \end{cases}$$

откуда следует:  $K_1 = -\zeta_K$ ,  $K_2 = \sigma \zeta_K$ ,

а общее решение уравнения (22) будет иметь следующий вид:

$$\zeta = \zeta_K (1 - e^{\sigma t}) + t \sigma \zeta_K e^{\sigma t} = \zeta_1 + \zeta_2, \quad (23)$$

где  $\zeta_1 = (1 - e^{\sigma t}) \zeta_K$ ,  $\zeta_2 = t \sigma \zeta_K e^{\sigma t}$ .

График движения рабочего элемента представлен на рис. 5. Как видно из (23) и рис. 5,

результирующая кривая 4 для режима разгона является алгебраической суммой двух слагаемых, из которых первое – кривая  $\zeta_1$  (кривая 5), а второе – кривая  $\zeta_2$ , которая представляет собой произведение кривых  $\zeta = \sigma \zeta_K e^{\sigma t}$  (кривая 2) и  $\zeta = t$  (луч 1), произведение представлено кривой 3.

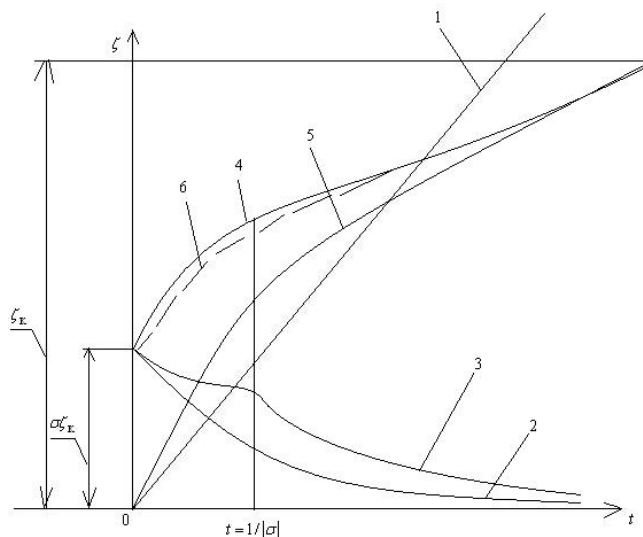


Рис. 5

Исследуя  $\zeta_2$  на экстремальность, получим выражение

$$\sigma^1 = t \sigma^2 \zeta_K e^{\sigma t} + \sigma \zeta_K e^{\sigma t} = 0, \text{ откуда } t = 1/|\sigma|.$$

Из полученного следует, что результирующая кривая имеет экстремум при  $t = 1/|\sigma|$ .

Учитывая изложенные для НУ при  $t = 0$ ,  $\dot{\zeta} = 0$ , можно представить реальную кривую разгона в виде пунктирной линии 6 на рис. 5.

### Режим торможения

Из НУ (при  $t = 0$ ,  $\zeta = \zeta_T$ ,  $\dot{\zeta} = \omega_T$ ) получим для режима торможения:

$$\zeta_t = K_1 e^{\sigma t} + t K_2 e^{\sigma t} + \zeta_K; \quad (24)$$

$$\omega_t = \sigma K_1 e^{\sigma t} + K_2 e^{\sigma t} + \sigma t K_2 e^{\sigma t}, \quad (25)$$

откуда следует:

$$K_1 = \zeta_T - \zeta_K, \quad K_2 = \omega_T - (\zeta_T - \zeta_K) \sigma,$$

а общее решение уравнения (22) в режиме торможения будет иметь вид

$$\zeta_T = (\sigma_T - \sigma_K) e^{\sigma t} + t e^{\sigma t} [\omega_T - \sigma (\zeta_T - \zeta_K)] + \zeta_K.$$

Для графического представления удобнее пользоваться выражением (24), приведенным, как было использовано ранее, к виду:

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_K,$$

где  $\zeta_1 = K_1 e^{\sigma t}$ ,  $\zeta_2 = t K_2 e^{\sigma t}$ .

Упомянутые кривые представлены на рис. 6:

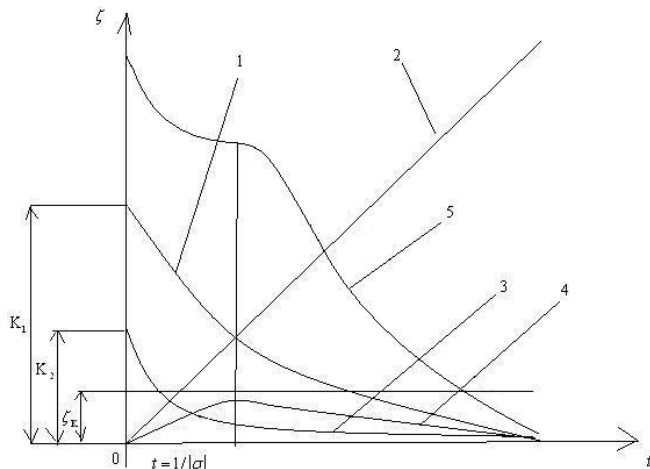


Рис. 6:  $\zeta_1$  – кривая 1,  $\zeta_2$  – кривая 2 представлена в виде сомножителей  $\zeta = t$  и  $\zeta = K_2 e^{\sigma t}$  (кривая 3) и их произведения  $\zeta = t K_2 e^{\sigma t}$  (кривая 4), результирующая кривая торможения  $\zeta(t)$  представлена кривой 5. Кривая  $\zeta_2$ , как было отмечено, имеет экстремум (максимум) при  $t = 1/|\sigma|$ .

### Поворотный рабочий элемент как звено системы автоматического регулирования

Запишем уравнение (7) в операторной форме [3]:

$$(T_1^2 \rho^2 + T_2 \rho + 1) \Delta \zeta_{\text{вых}} = L \Delta \zeta_{\text{вх}}, \quad (26)$$

где  $\rho$  – оператор дифференцирования;

$T_1 = \frac{I_\Sigma}{c}$  – постоянная времени рабочего элемента;

$T_2 = \frac{\lambda + \nu}{c}$  – постоянная времени упругого и вязкоупругого элементов;

$L = \frac{M_0 - M_{\text{см}}}{c}$  – коэффициент передачи крутящего момента;

$\zeta_{\text{вых}}, \zeta_{\text{вх}}$  – соответственно амплитуды выходной и входной величин (угла поворота).

Тогда согласно [3] передаточная функция поворотного рабочего элемента как звена САР примет вид

$$W(\rho) = \frac{L}{T_1^2 \rho^2 + T_2 \rho + 1}. \quad (27)$$

Корни характеристического уравнения этого звена таковы:

$$\rho_1, \rho_2 = -\frac{T_2}{2T_1^2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_2}{2T_1^2}\right)^2 - \frac{1}{T_1^2}}. \quad (28)$$

Как было отмечено, корни отрицательные и вещественные. Тогда дифференциальное уравнение (26) можно представить в следующем виде:

$$\left(-\frac{\rho}{\rho_1} + 1\right) \left(-\frac{\rho}{\rho_2} + 1\right) \Delta \zeta_{\text{вых}} = L \zeta_{\text{вх}}, \quad (29)$$

где, согласно с алгебраическими основами квадратных уравнений [3]:

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} = T_1^2 \text{ и } -\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) = T_2. \quad (30)$$

В этом случае звено второго порядка можно заменить двумя последовательно включенными инерционными звеньями, передаточные функции которых соответственно имеют вид:

$$W_1(\rho) = \frac{L_1}{T_1 \rho + 1} \text{ и } W_2(\rho) = \frac{L_2}{T_2 \rho + 1},$$

где  $L_1$  и  $L_2$  – коэффициенты передачи соответственно первого и второго инерционных звеньев, а структурная схема САР, состоящая из двух последовательно включенных инерционных звеньев, представлена на рис. 7

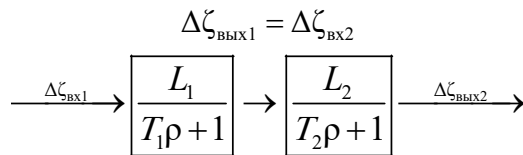


Рис. 7

Частотные характеристики инерционного звена (амплитудно-частотные, фазо-частотные и амплитудно-фазовая частотная) представлены в [1] и здесь их представлять нет необходимости. Что касается переходной функции САР из двух последовательно соединенных звеньев, то согласно [3] имеем

$$W_{(\rho)} = W_{1(\rho)} \cdot W_{2(\rho)}, \text{ т.е. } W_{(\rho)} = \frac{L_1 \cdot L_2}{(T_1 \rho + 1)(T_2 \rho + 1)}.$$

Дифференциальное уравнение цепочки инерционных звеньев имеет вид:

$$(T_1\rho + 1)(T_2\rho + 1)\Delta\zeta_{\text{ВЫХ}} = L_1 \cdot L_2\Delta\zeta_{\text{ВХ}},$$

а после преобразований, получим:

$$\left[ T_1T_2\rho^2 + (T_1 + T_2)\rho + 1 \right] \Delta\zeta_{\text{ВЫХ}} = L_1 \cdot L_2\Delta\zeta_{\text{ВХ}}$$

или

$$T_1T_2 \frac{d^2\Delta\zeta_{\text{ВЫХ}}}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\Delta\zeta_{\text{ВЫХ}}}{dt} + 1 = L_1L_2\Delta\zeta_{\text{ВХ}}.$$

Рассмотрение поворотного рабочего элемента как колебательного звена (при мнимых корнях уравнения (7)) представлено в [1, 2].

В данном случае такое рассмотрение лишено смысла, поскольку, как отмечено ранее, для успокоения (гашения) колебаний специально установлен вязкоупругий элемент – демпфер. В силу этого поворотный рабочий элемент следует рассматривать как САР, состоящий из двух последовательно соединенных инерционных звеньев (см. рис. 7).

**Заключение.** В результате рассмотрения поворотного рабочего элемента, например, рабочего органа робота, исполнительного элемента манипулятора, на который воздействует крутящий момент двигателя и противодействующие ему силы – статический момент (трение) [1]; статический момент плюс крутящий момент от действия упругого элемента [2]; статический момент, крутящий момент от действия упругого элемента плюс момент от действия вязкоупругого элемента (демпфера) получены:

- характеристика двигателя  $M_{\text{дв}} = f(\omega)$ , которая, как правило, не имеет четко выраженной математической зависимости и которая представлена в виде наклонной прямой *в отрезках*, что позволило получить неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка и рассмотреть поведение поворотного рабочего элемента в переходных режимах разгона/торможения.

Характер переходных процессов разгона/торможения зависит от параметров (коэффициентов) указанного дифференциального уравнения, в частности, от корней его характеристического уравнения: корни могут быть как действительными отрицательными числами и тогда пере-

ходные процессы разгона/торможения поворотного рабочего элемента носят характер возрастающих (разгон) и убывающих (торможение) экспонент, так и комплексными, и тогда переходные процессы носят характер затухающих (определен декремент затухания) гармонических колебаний (исключением является данная статья, в которой рассмотрено действие вязкоупругих сил, практически исключающих возникновение гармонических колебаний).

Чем больше сопротивление от действия сил трения, сил упругости и вязкоупругих сил, тем больше времени занимает разгон для достижения требуемого угла поворота рабочего элемента и тем меньше времени занимает торможение для достижения полной остановки.

Поворотный рабочий элемент рассмотрен как автономное звено САР: показано, что в зависимости от корней характеристического уравнения это звено может быть представлено либо как два последовательно включенных инерционных звена (действительные корни), либо как колебательное звено (комплексные корни), приведены переходные функции и частотные характеристики указанных звеньев.

Получена возможность не только оценить достигаемый результат, но и активно его изменять, для чего имеется достаточно широкий арсенал средств: параметры приводного двигателя (крутящий момент, частота вращения), поворотного рабочего элемента (масса, момент инерции, конструкция), а также параметры упругого и вязкоупругого элементов.

Анализ показал, что при частотах, близких к значению  $1/T_1$  система может войти в резонанс, в результате чего амплитуда колебаний может достигать значительных величин.

1. Гриценко В.И., Родионов А.А., Перлов Е.Ф. Некоторые аспекты динамики переходных процессов поворотного рабочего элемента, действующего без упругих и вязкоупругих сил // УСиМ. – 2012. – № 5. – С. 36–45.
2. Перлов Е.Ф. Некоторые аспекты динамики переходных процессов поворотного рабочего элемента под воздействием упругих сил // Там же. – 2016. – № 5. – С. 47–53.

3. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров – М.: Наука, 1981. – 720 с.
4. *Солодовников В.В., Плотников В.А., Яковлев А.В.* Основы теории и элементы системы автоматичес-

кого регулирования – М.: Машиностроение, 1985. – 536 с.

Поступила 11.08.2017  
Тел. для справок: +38 044 526-0688 (Киев)  
© Е.Ф. Перлов, 2017

UDC 007.72; 531.395; 531.553; 621.51/54

Y. Perlov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Doctor of Technical Sciences, International Research and Training Centre of Information Technologies and Systems of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine.

### **Some aspects of the dynamics of the transient rotary operating element under the influence of elastic and viscoelastic forces**

**Keywords:** rotary working element, dynamic, acceleration–deceleration, differential equation, automatic control system (ACS).

**Background.** The necessity to create the mathematical model of the dynamic behavior of the rotary operating element, which is under the influence of the inertial forces (friction, elastic and viscoelastic) for using the model in robotics, manipulators, etc.

**Statement.** Due to the created mathematical model of the rotary operating element, working, as a rule, with the high angular and linear velocities and accelerations, performing herewith high-precision coordinate orientation, we are able to examine the dynamics of its behavior (movement) in acceleration and deceleration modes. This moving may be realized either by an exponential law, or under the law of damped harmonic oscillations.

The rotary working element is considered as a link of the automatic control system (ACS). In this case, the rotary working element can be represented either by the 2nd order link and this link can be replaced by the two series-connected inertial links or as an oscillating link.

**Research methodology.** These results are achieved due to the resulting inhomogeneous differential equation of 2nd order. Depending on the structure of the roots of the characteristic equation (real or complex roots) transients can be carried out either by an exponential law (real roots), or under the law of damped harmonic oscillations (complex roots). Moreover, the rotary operating element is considered as a link of ACS, that has been made possible by solving the differential equation, which was presented in a symbolic way by which amplitude-frequency, phase-frequency and amplitude-phase characteristics of the rotary operating element were obtained as a link of the ACS.

**Conclusion.** The conclusions enable the practical use of the results.

1. *Gritcenko V.I., Rodionov A.A., Perlov Ye.F.* The Aspects of the Dynamics Transitional Processes of the Turn Working Element Acting without Elastic and Tough Strength, Upr. sist. mas., 2012, N 5, P. 36–45. (In Russian).
2. *Perlov Ye.F.* Some Aspects of the Dynamics of the Transient Rotary Operating Element Under the Influence of the Elastic Forces, Upr. sist. mas., 2016, N 5, P. 47–53. (In Russian).
3. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov, M.; Nauka, 1981, 720 p. (In Russian).
4. *Solodovnikov V.V., Plotnikov V.A., Jakovlev A.V.* Osnovy teorii i jelementy sistemy avtomaticheskogo regulirovanija, M.; Mashinostroenie, 1985, 536 p. (In Russian).

●

**Внимание !**

**Оформление подписки для желающих  
опубликовать статьи в нашем журнале обязательно.**

**В розничную продажу журнал не поступает.**

**Подписной индекс 71008**