

УДК 004.942 + 623.454.862

Е.Г. Ревунова, А.В. Тищук

## Критерий выбора модели для решения дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения

Для метода решения дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения рассмотрен подход к определению минимума ошибки. Предложена аппроксимация ошибки восстановления вектора данных и критерий выбора оптимального числа компонент сингулярного разложения. Проведено исследование точности решения дискретных некорректных задач с использованием предложенного критерия.

An approach to finding the minimum of error for the method of solving discrete ill-posed problems based on singular value decomposition is proposed. We develop an approach of choosing the optimal number of the singular value decomposition components. The experimental investigation of discrete ill-posed problems solving accuracy based on the proposed criterion is conducted.

Для методу розв'язання дискретних некорректних задач на основі сингулярного розкладання розглянуто підхід до визначення мінімуму помилки. Запропоновано апроксимацію помилки відновлення вектора даних та критерій вибору оптимального числа компонент сингулярного розкладання. Проведено дослідження точності розв'язання дискретних некорректних задач з використанням запропонованого критерію.

**Введение.** Решение некорректных задач [1–3] актуально для многих областей науки и техники. Дискретные некорректные задачи [3] возникают, например, при дискретизации интегральных уравнений в таких областях, как спектрометрия, гравиметрия, магнитометрия, электроразведка и др.

Известно, что решение дискретной некорректной обратной задачи как задачи наименьших квадратов – неустойчиво. Неустойчивость проявляется в том, что малым изменениям в векторе данных (измерений) соответствуют большие изменения в векторе решения; при этом велико значение ошибки решения.

Для преодоления неустойчивости и, соответственно, повышения точности решения используют методы регуляризации [1]. Одним из методов регуляризации, используемых при решении обратных задач, есть решение на основе сингулярного разложения с усечением [4, 5], т.е. такое, когда при решении используются не все компоненты сингулярного разложения. Поиск оптимального числа компонент сингулярного разложения, такого, при котором решение дискретной некорректной задачи демонстрирует устойчивость и максимальную точность – актуально.

В данной статье проведено аналитическое исследование составляющих ошибки решения дискретной некорректной задачи на основе сингулярного разложения с усечением. Предложен критерий выбора оптимального числа компонент сингулярного разложения, основанный на аппроксимации ошибки восстановления вектора данных с использованием оценки истинного сигнала. Проведено исследование точности решения дискретных некорректных задач с использованием предложенного критерия.

### Линейные задачи наименьших квадратов и дискретные некорректные задачи

Многие приложения математики, физики, анализа данных и другие нуждаются в поиске приближенного решения системы линейных уравнений:

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}, \quad (1)$$

где матрица  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  и вектор  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^N$ , искаженный аддитивным шумом  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^N$   $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})$ , известны, и требуется оценить вектор сигнала  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ . Задачу оценивания вектора  $\mathbf{x}$  по известному вектору  $\mathbf{y}$  и матрице  $\mathbf{A}$  называют обратной задачей.

Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет полный ранг и хорошо обусловлена, оценку  $\mathbf{x}'$  для метода наименьших квадратов можно получить путем решения системы нормальных уравнений [6, 7], например, с помощью разложения Холецкого. В случае, когда матрица  $\mathbf{A}$  имеет неполный ранг или плохо обусловлена, для получения оценки  $\mathbf{x}'$  может использоваться решение на основе  $QR$ -разложения.

В случае, когда матрица  $\mathbf{A}$  очень плохо обусловлена, для получения устойчивой оценки  $\mathbf{x}'$  используют разложение по сингулярным значениям ( $SVD$ ). Решение на основе сингулярного разложения получают следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{V} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{A}_k = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$  – приближение матрицы  $\mathbf{A}$ , полученное по  $k$  ( $k < N$ ) компонентам сингулярного разложения,  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  – матрица левых сингулярных векторов с ортонормированными столбцами,  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$  – матрица правых сингулярных векторов с ортонормированными столбцами,  $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  – матрица сингулярных чисел,  $\mathbf{A}^+$  – обобщенное обращение (псевдообращение) матрицы  $\mathbf{A}$ .

Учитывая, что  $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T$ , запишем рекурсивное выражение для матрицы  $\mathbf{A}_k^+$ :

$$\mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \sigma_i^{-1} \mathbf{u}_i^T, \quad \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{u}_k^T. \quad (3)$$

Методы, основанные на (2), находят решение за время  $O(mn^2)$ . Метод  $SVD$  является наиболее вычислительно нагруженным среди упомянутых (с точностью до постоянных множителей), но его использование предпочтительно, если  $\mathbf{A}$  очень плохо обусловлена. Большое число обусловленности ( $\sigma_{\max}(\mathbf{A})/\sigma_{\min}(\mathbf{A})$ ) матрицы  $\mathbf{A}$  подразумевает потенциально неустойчивое и неточное решение. Проявлением неустойчивости есть тот факт, что небольшие изменения в векторе  $\mathbf{y}$  (например, из-за шума) вызывают большие изменения в решении  $\mathbf{x}'$ , и ошибка решения, как правило, велика, особенно при

увеличении уровня шума. При большом числе обусловленности числа, обратные сингулярным значениям в  $\mathbf{S}^{-1}$ , становятся очень большими, поэтому (как следует из (2)) и значения компонент  $\mathbf{x}'$  становятся очень большими, что ведет к неточности решения.

При большом числе обусловленности получить устойчивое решение на основе сингулярного разложения удастся в случае, если можно использовать прием усечения сингулярного разложения. Идея получения устойчивой оценки  $\mathbf{x}'$  на основе усеченного сингулярного разложения состоит в следующем: если в спектре сингулярных значений наблюдается резкий перепад, а сингулярные значения после него очень малы, они могут рассматриваться как шумовые и устраняются применением порога:

$$\mathbf{x}'_{tsvd} = \mathbf{V} \text{diag} \left( \frac{\Phi_i}{\sigma_i} \right) \mathbf{U}^T \mathbf{y}, \quad (4)$$

при  $i \leq k$   $\Phi_i = 1$ , иначе  $\Phi_i = 0$ .

В случае, когда  $\mathbf{y}$  содержит шум, ряд сингулярных чисел  $\sigma_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  плавно спадает к нулю,  $\mathbf{A}$  имеет высокое число обусловленности, задачу оценки  $\mathbf{x}$  называют дискретной некорректной обратной задачей [3]. Прием усечения сингулярного разложения не работает в дискретных некорректных задачах, поскольку, как отмечалось, здесь нет перепадов в ряду сингулярных значений и численный ранг не определен.

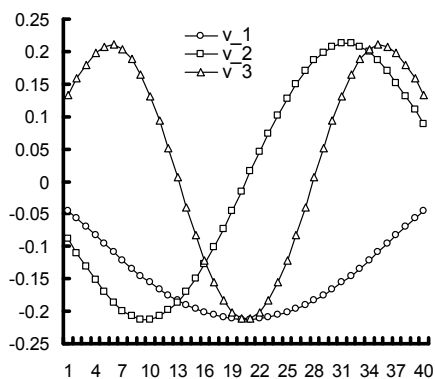
Поиск числа компонент сингулярного разложения, соответствующего оптимальному решению дискретной некорректной задачи, – актуален. Проиллюстрируем это утверждение.

Из выражения для оценки  $\mathbf{x}'$ , записанного в векторном варианте

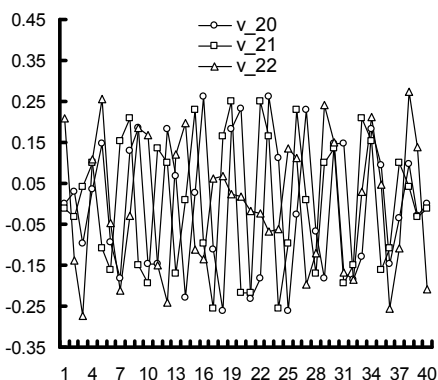
$$\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i, \quad (5)$$

видно, что  $\mathbf{x}'$  формируется как сумма векторов  $\mathbf{v}_i$ , взвешенных коэффициентами  $\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{\sigma_i}$ . Типичный вид векторов  $\mathbf{v}_i$  приведен на рис. 1, из которого следует, что с ростом индекса  $i$  век-

торы становятся все более знакопеременными, шумоподобными.



a



б

Рис. 1. Сингулярные векторы: а – с номерами 1–3; б – с номерами 20–22

В случае, когда вклад в оценку  $\mathbf{x}'$  определяется преимущественно членами суммы, соответствующими большим сингулярным значениям (гладким сингулярным векторам), обеспечивается гладкость и малая погрешность решения. Если вклад в оценку  $\mathbf{x}'$  определяется членами суммы, соответствующими малым сингулярным значениям (сильно знакопеременным сингулярным векторам), ошибка решения увеличивается. Понятно, что существует некоторое оптимальное число компонент в выражении (5), такое, что, с одной стороны, оно – достаточно, чтобы передать все особенности моделируемого сигнала, а с другой – не содержит шумоподобных векторов  $\mathbf{v}_i$ .

Поэтому востребованна разработка подхода к определению оптимального числа компонент сингулярного разложения для решения дискрет-

ной некорректной обратной задачи. Оптимальным числом компонент сингулярного разложения будем считать такое, при котором точность решения обратной задачи максимальна. Далее рассмотрим точность восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$  и точность восстановления вектора выхода  $\mathbf{y}$  при решении дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения.

### Ошибка восстановления истинного сигнала при решении дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения

Точность решения обратной задачи оценим с помощью ошибки  $e_x$  восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$ , вычисляемой как  $e_x = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_k\| = \|\mathbf{e}_x\|$ , где  $\mathbf{x}'_k$  – вектор восстановленного сигнала,  $\mathbf{e}_x$  – вектор ошибки восстановления сигнала  $\mathbf{x}$  с использованием  $k$  компонент сингулярного разложения.

Запишем выражение для вектора ошибки  $\mathbf{e}_x$  так, чтобы вектор шума входил в него явно:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{A}_k^+ (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{x} = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6)$$

Используя (6), запишем выражение для ошибки восстановления истинного сигнала и проведем усреднение по реализациям шума:

$$\begin{aligned} e_x &= \|\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \\ &+ \|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2\langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E\{e_x\} &= \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \\ &+ E\|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - 2E\langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая, что  $E\langle (\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}, \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$  и  $E\|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k \boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k)$ , получим выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала:

$$E\{e_x\} = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k). \quad (9)$$

Обозначим составляющие ошибки как

$$e_{x1} = \|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2, \quad e_{x2} = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k), \quad (10)$$

где  $e_{x1}$  – детерминированная составляющая ошибки и  $e_{x2}$  – стохастическая.

Точность восстановления вектора выхода оценим следующим образом:  $e_y = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}'_k\| = \|\mathbf{e}_y\|$ , где  $\mathbf{y}'_k = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}$  – восстановленный вектор выхода,  $\mathbf{e}_y$  – вектор ошибки восстановления выхода. Выражения для вектора ошибки  $\mathbf{e}_y$  и ошибки восстановления выхода запишем как

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{y}_0 = \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} e_y &= \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0\|^2 + \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \\ &- 2 \langle \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Усредним ошибку восстановления выхода по реализациям шума:

$$\begin{aligned} E\{e_y\} &= \|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0\|^2 + E\|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 - \\ &- 2E\langle \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как  $2E\langle \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0, \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$  и

$$\begin{aligned} E\|\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 &= E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T), \end{aligned}$$

среднеквадратичная ошибка восстановления выхода такова:

$$\begin{aligned} E\{e_y\} &= \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T). \end{aligned} \quad (14)$$

Составляющие ошибки восстановления выхода

$$\begin{aligned} e_{y1} &= \|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2, \\ e_{y2} &= \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $e_{y1}$  – детерминированная составляющая ошибки и  $e_{y2}$  – стохастическая.

Один из подходов к решению обратных задач – выбор модели (*model selection*). Задача – выбрать модель, близкую к оптимальной для определенного приложения. Модель обычно

представлена в виде  $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{f}_i$ , где  $\mathbf{m}$  – вектор выхода модели,  $\mathbf{f}_i$  – вектор дискретно за-

данной функции компоненты модели,  $w_i$  – весовой коэффициент,  $k$  – число компонент модели. Методы выбора модели используют различные критерии выбора [8]. Критерии выбора модели (КВМ) формулируются так, чтобы автоматически уменьшать число компонент модели с увеличением уровня шума. КВМ включают в себя две составляющих, одна из которых связана с точностью аппроксимации данных моделью. Значение этой составляющей убывает с ростом числа компонент модели. Другая составляющая, связанная с уровнем шума, с ростом числа компонент модели растет. Такое построение критериев обеспечивает достижение минимума на моделях, близких к оптимальным, благодаря балансу между сложностью модели и точностью аппроксимации. В случае решения дискретных некорректных обратных задач на основе сингулярного разложения под сложностью модели понимают число компонент сингулярного разложения в выражении (3).

Многие существующие КВМ основаны на аппроксимации различных типов ошибки, например, критерий Маллоуза использует ошибку прогнозирования (*predictive training error*) [9], критерий Акаике – ошибку обобщения (*generalization error*) [10].

С целью разработки КВМ для решения дискретной некорректной задачи исследуем поведение составляющих ошибки (10) и (15) в зависимости от числа компонент сингулярного разложения, входящих в модель.

**Исследование зависимости детерминированной и стохастической составляющих ошибки от числа компонент сингулярного разложения**

Рассмотрим поведение составляющих ошибки восстановления истинного сигнала.

Исследуем аналитически зависимость детерминированной составляющей ошибки  $\|(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2$  от числа компонент сингулярного разложения  $k$ .

Обозначив  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k$ , получим:

$$\begin{aligned} e_{x1} &= \|(\mathbf{Z}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{Z}_k \mathbf{x} - \mathbf{x})^T (\mathbf{Z}_k \mathbf{x} - \mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (16)$$

Матрица  $\mathbf{Z}_k$  – ортогональный проектор; используя свойство проектора  $\mathbf{Z}_k^T \mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_k$ , запишем выражение для  $e_{x1}$ :

$$e_{x1} = \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x}. \quad (17)$$

Запишем  $\mathbf{Z}_k$ , используя сингулярное разложение

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T. \quad (18)$$

Учитывая, что в силу ортонормированности  $\mathbf{U}_k^T \mathbf{U}_k = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k = \mathbf{I}$ , получаем:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T. \quad (19)$$

Выражение для детерминированной составляющей ошибки принимает вид

$$e_{x1} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{Z}_k \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{x}. \quad (20)$$

Распишем  $\mathbf{Z}_k$  в виде суммы произведений векторов  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$ . Тогда  $\mathbf{x}^T \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}$ . Произведение  $\mathbf{x}^T \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}$  – это положительное число, поэтому значение  $\sum_{i=1}^k \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}$  возрастает с ростом  $k$ .

В силу того, что  $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$  постоянно и  $\sum_{i=1}^k \mathbf{x}^T \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{x}$  растет, значение детерминированной составляющей ошибки  $e_{x1}$  убывает с ростом  $k$ .

Исследуем зависимость стохастической составляющей ошибки  $e_{x2}$  от числа компонент сингулярного разложения. Стохастическая составляющая ошибки есть  $E \|\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+)$ .

Для исследования зависимости стохастической составляющей ошибки от  $k$  запишем выражение для  $\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+$  в рекурсивном виде. Рекурсивная запись следует из свойств (3) сингулярного разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{A}_k^+ &= \mathbf{A}_{k-1}^{+T} \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{u}_k \mathbf{s}_k^{-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k \mathbf{s}_k^{-1} \mathbf{u}_k^T = \\ &= \mathbf{A}_{k-1}^{+T} \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{s}_k^{-2} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T. \end{aligned} \quad (21)$$

На основании (6) запишем рекурсивное выражение для стохастической составляющей ошибки:

$$e_{x2} = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_{k-1}^{+T} \mathbf{A}_{k-1}^+) + \sigma^2 \mathbf{s}_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T). \quad (22)$$

Элементы диагонали матрицы  $\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T$  сформированы произведениями  $u_i u_i$  – неотрицательными числами, поэтому исходя из рекурсивного выражения (22) значение стохастической составляющей ошибки  $e_{x2}$  растет с ростом  $k$ .

Рассмотрим поведение составляющих ошибки восстановления вектора выхода.

Исследуем зависимость детерминированной составляющей ошибки восстановления выхода  $\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0\|^2$  от числа компонент сингулярного разложения  $k$ .

Обозначив  $\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k$ , получим:

$$\begin{aligned} e_{y1} &= \|(\mathbf{P}_k - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0\|^2 = (\mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0)^T (\mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0) = \\ &= \mathbf{y}_0^T \mathbf{P}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 - 2\mathbf{y}_0^T \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Матрица  $\mathbf{P}_k$  есть ортогональный проектор; используя свойство проектора  $\mathbf{P}_k^T \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k$ , запишем выражение для  $e_{y1}$ :

$$e_{x1} = \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^T \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0. \quad (24)$$

Используя сингулярное разложение и учитывая, что  $\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k = \mathbf{I}$ , запишем:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{U}_k \mathbf{S}_k \mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T = \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T. \quad (25)$$

Выражение для детерминированной составляющей ошибки примет вид

$$\begin{aligned} e_{y1} &= \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^T \mathbf{P}_k \mathbf{y}_0 = \\ &= \mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_0^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (26)$$

$\mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_0 = [\mathbf{u}_1^T \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{u}_k^T \mathbf{y}_0]$  есть вектор растущей с ростом  $k$  размерности, поэтому значение скалярного произведения  $\mathbf{y}_0^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_0$  также растет с ростом  $k$ .

В силу того, что  $\mathbf{y}_0^T \mathbf{y}_0$  постоянно и  $\mathbf{y}_0^T \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k^T \mathbf{y}_0$  растет, значение  $e_{y1}$  убывает с ростом  $k$ .

Исследуем зависимость стохастической составляющей ошибки  $e_{y2}$  от числа компонент

сингулярного разложения. Стохастическая составляющая ошибки есть

$$E \left\| \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+).$$

По свойству цикличности следа матрицы

$$E \left\| \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^T). \quad (27)$$

Для исследования зависимости стохастической составляющей ошибки от  $k$  запишем выражения для  $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+$ , а затем и  $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+$  в рекурсивном виде.

Запишем  $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k$  в рекурсивном виде, используя свойство сингулярного разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k &= \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{v}_k^T = \\ &= \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T, \quad \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Получим рекурсивное выражение для  $\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+ &= \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{v}_k^T = \\ &= \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (28) и (29), запишем рекурсивное выражение для  $\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+ &= \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \\ &+ \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T + \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \\ &+ \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T. \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что в выражении (30)  $\mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ = 0$  и  $\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T = 0$ .  $\mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ = \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1}^{-1} \mathbf{U}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1}^+ = 0$ , в силу ортогональности сингулярных векторов  $\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T = \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{U}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^T \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T$ ,  $\mathbf{V}_{k-1}^T \mathbf{v}_k = 0$ .

Получим рекурсивное выражение вида

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+ &= \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \\ &+ \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^T = \mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T. \end{aligned} \quad (31)$$

Используя (31), запишем выражение для стохастической составляющей ошибки

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+) &= \\ &= \text{trace}(\mathbf{A}_{k-1}^T \mathbf{A}_{k-1} \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^+) + \text{trace}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T). \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая, что  $\text{trace}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T) = 1$ , итоговое выражение для стохастической составляющей

ошибки восстановления вектора выхода выглядит так:

$$e_{y_2} = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+) = \sigma^2 k. \quad (33)$$

Из последнего выражения видно, что  $e_{y_2}$  с ростом  $k$  возрастает.

**Подход к определению оптимального числа компонент сингулярного разложения**

Оптимальным числом компонент сингулярного разложения называем такое число  $k$ , при котором ошибка восстановления истинного сигнала минимальна. Поскольку в реальных условиях такую ошибку вычислить невозможно в силу отсутствия данных об истинном сигнале, предлагаем для определения оптимального  $k$  использовать ошибку восстановления вектора выхода  $\| \mathbf{y}' - \mathbf{y}_0 \|$ .

Выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления выхода выглядит так:

$$\begin{aligned} e_y &= \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \end{aligned} \quad (34)$$

Использовать для определения минимума ошибки непосредственно выражение (34) невозможно из-за наличия в нем вектора  $\mathbf{y}_0$ , который в реальных условиях неизвестен. Заменим в (34) неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0$  на известный вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$  (полученный, например, в результате измерений) и проведем усреднение по реализациям шума:

$$\begin{aligned} e'_y &= \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) (\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \right\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} E\{e'_y\} &= \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2 + E \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 + \\ &+ 2E \left\langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \end{aligned} \quad (36)$$

Учитывая, что  $2E \left\langle (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0, (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle = 0$  и  $E \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}))$ , выражение (36) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} E\{e'_y\} &= \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \end{aligned} \quad (37)$$

Сопоставив выражения для  $E\{e_y'\}$  и для среднеквадратичной ошибки восстановления выхода (34), видим, что они отличаются одним слагаемым:  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}))$ . Это позволяет скорректировать вклад шума в оценку смещения на основе зашумленного выхода  $\|(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2$  путем вычитания из нее  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}))$  и получить аппроксимацию выражения (34), не содержащую неизвестного вектора  $\mathbf{y}_0$ :

$$CR = \left\| (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})\mathbf{y} \right\|^2 - \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I})) + \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+)^T \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+). \quad (38)$$

Получено выражение, аппроксимирующее ошибку восстановления выхода. Вместо неизвестного вектора  $\mathbf{y}_0$  в выражение (38) входит известный вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ , поэтому  $CR$  можно использовать для определения оптимального числа компонент сингулярного разложения.

### Экспериментальное исследование

Результаты аналитического исследования ошибки восстановления истинного сигнала и ошибки восстановления выхода были проверены экспериментально. Построена зависимость ошибки восстановления истинного сигнала, ее детерминированной и стохастической составляющих от числа компонент сингулярного разложения  $k$ . Аналогичные зависимости построены для ошибки восстановления выхода и ее составляющих. Эксперименты подтвердили, что при возрастании  $k$  детерминированная составляющая ошибки уменьшается, а стохастическая возрастает так, что суммарная зависимость ошибки от  $k$  имеет минимум.

Пример этих зависимостей для дискретных некорректных задач *Phillips* и *Delves* [11] приведен на рис. 2 и 3. Для задачи *Phillips* эксперименты проводились при уровнях шума  $1\text{E}-4$ ,  $1\text{E}-5$ ,  $1\text{E}-6$ , для задачи *Delves* – при  $1\text{E}-3$ ,  $1\text{E}-4$ ,  $1\text{E}-5$ .

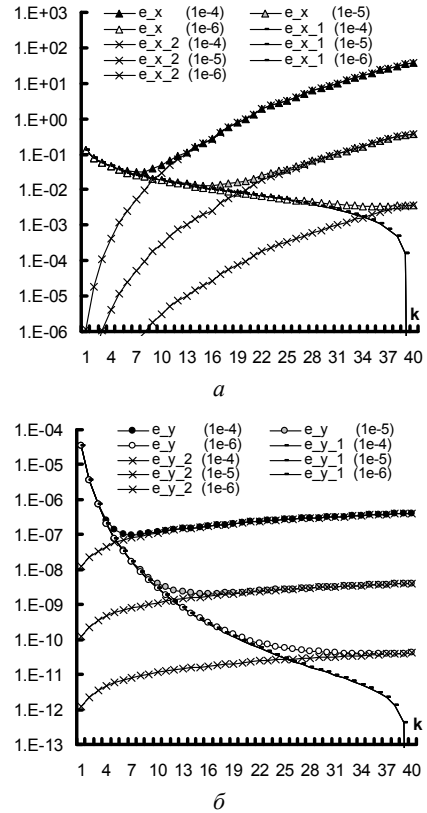


Рис. 2. Для задачи *Phillips*: *a*– зависимость ошибки восстановления истинного сигнала, ее детерминированной и стохастической составляющих от  $k$ ; *б* – зависимость ошибки восстановления выхода, ее детерминированной и стохастической составляющих от  $k$

С ростом уровня шума положение минимума смещается в область меньших значений  $k$  как для ошибки восстановления истинного сигнала, так и для ошибки восстановления выхода.

Следующий этап эксперимента состоял в исследовании предложенного критерия выбора модели. На рис. 4 для задачи *Carasso* приведены соответствующие графики. Графики зависимостей близки, критерий выбора модели  $CR$  хорошо аппроксимирует ошибку восстановления выхода.

Для исследования эффективности предложенного критерия выбора модели проведено вычисление среднего значения  $M(e)$  и с.к.о. ошибки решения для случаев определения оптимального числа компонент сингулярного разложения по критерию  $CR$  и по критериям выбора модели (Маллоуза  $C_p$  [9], Акаике  $AIC$  [10], минимальной длины описания  $MDL$  [12]).

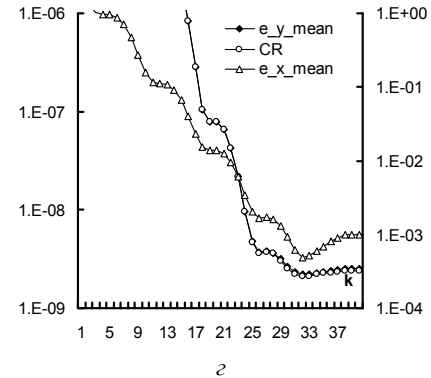
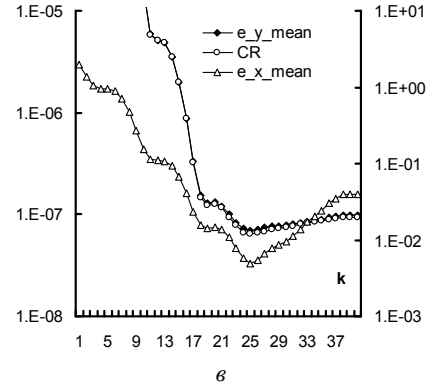
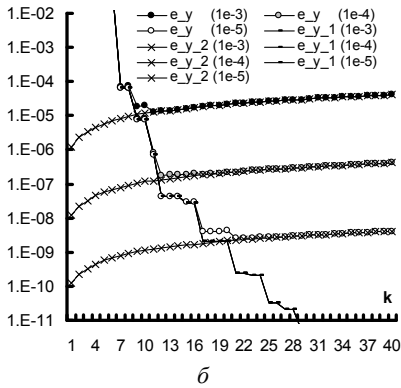
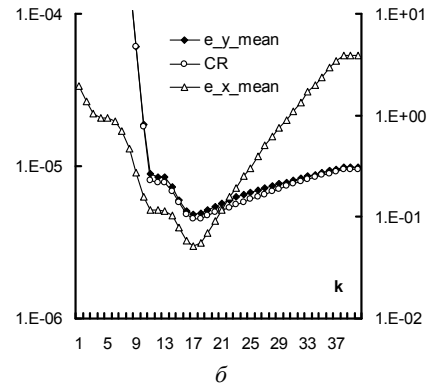
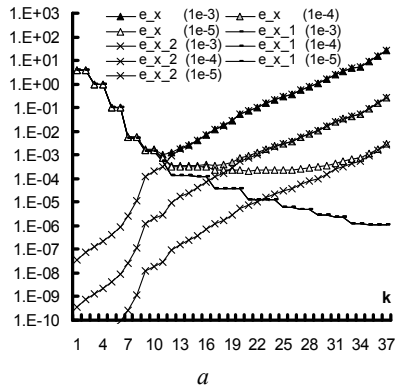


Рис. 3. Для задачи *Delves*: *a* – зависимость ошибки восстановления истинного сигнала, ее детерминированной и стохастической составляющих от  $k$ ; *б* – зависимость ошибки восстановления выхода, ее детерминированной и стохастической составляющих от  $k$

Исследование проведено для дискретных некорректных задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves*. В табл. 1 приведены результаты решения дискретных некорректных задач на основе сингулярного разложения, где размерность матрицы  $\mathbf{A}$  составляла  $40 \times 40$ . В табл. 2 приведены результаты для матрицы размерностью  $100 \times 100$ . Результаты (средние и с.к.о.) получены для трех уровней шума в  $y$  при 100 реализациях на каждом уровне.

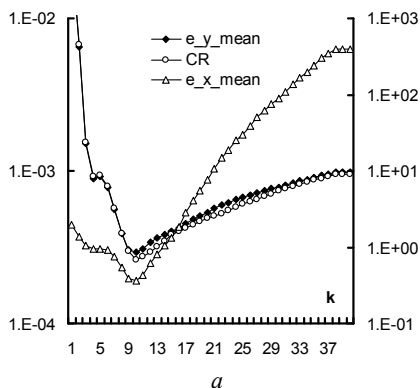


Рис. 4. Зависимости значений критерия  $CR$  и ошибки восстановления выхода от  $k$ : *a* – для уровня шума  $1E-3$ ; *б* – для уровня шума  $1E-4$ ; *в* – для уровня шума  $1E-5$ ; *г* – для уровня шума  $1E-6$

Анализ результатов показал, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается при использовании критерия  $CR$  как для матрицы размерностью  $40 \times 40$ , так и для матрицы  $100 \times 100$ . Критерий Акаике дает ошибку, близкую к минимальной.

**Заключение.** Аналитическое исследование составляющих ошибки решения дискретной некорректной задачи на основе сингулярного разложения с усечением показало, что при возрастании  $k$  детерминированная составляющая



**Таблица 1.** Среднее значение ошибки решения и его средноквадратичное отклонение, среднее значение  $k$  и его средноквадратичное отклонение при размерности матрицы  $40 \times 40$

Задача	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
<i>Phillips</i>	$nl = 1E - 3$				$nl = 1E - 4$				$nl = 1E - 5$			
<i>E</i>	9,24E-2	2,67E-2	15,5	2,05	1,11E-2	3,37E-3	23,40	2,15	6,38E-4	1,87E-4	32,38	1,31
<b><i>CR</i></b>	<b>1,07E-1</b>	<b>3,09E-2</b>	<b>14,4</b>	<b>2,70</b>	<b>1,31E-2</b>	<b>4,74E-3</b>	<b>22,44</b>	<b>2,72</b>	<b>7,66E-4</b>	<b>2,97E-4</b>	<b>31,86</b>	<b>1,80</b>
<i>Cp</i>	1,84E-1	4,69E-2	9,88	0,52	2,38E-2	5,84E-3	17,16	0,55	2,15E-3	3,36E-4	24,96	0,28
<i>AIC</i>	1,33E-1	1,54E-2	11,2	0,77	1,73E-2	2,19E-3	18,30	0,95	2,04E-3	1,24E-4	25,12	0,33
<i>MDL</i>	1,51E-1	2,61E-2	10,4	0,54	7,73E-2	4,67E-2	13,58	3,21	1,54E-2	9,52E-6	18,0	0,0
<i>Carasso</i>	$nl = 1E - 3$				$nl = 1E - 4$				$nl = 1E - 5$			
<i>E</i>	8,37E-4	3,11E-4	11,6	0,49	3,06E-4	3,17E-5	15,7	2,07	2,15E-4	6,22E-6	21,8	1,71
<b><i>CR</i></b>	<b>9,89E-4</b>	<b>4,61E-4</b>	<b>11,3</b>	<b>1,04</b>	<b>3,32E-4</b>	<b>5,39E-5</b>	<b>14,04</b>	<b>2,24</b>	<b>2,22E-4</b>	<b>1,21E-5</b>	<b>22,9</b>	<b>2,78</b>
<i>Cp</i>	4,49E-3	1,57E-3	7,52	0,89	3,36E-4	1,39E-5	12,00	0,0	2,32E-4	2,76E-6	17,0	0,0
<i>AIC</i>	1,36E-3	3,46E-4	10,2	1,04	3,50E-4	4,83E-5	12,34	1,14	2,29E-4	6,72E-6	18,1	1,81
<i>MDL</i>	4,41E-3	1,63E-3	7,56	0,91	3,61E-4	1,01E-4	11,94	0,24	3,28E-4	1,27E-6	12,0	0,0
<i>Delves</i>	$nl = 1E - 4$				$nl = 1E - 5$				$nl = 1E - 6$			
<i>E</i>	2,83E-2	3,62E-3	7,96	1,40	1,23E-2	1,30E-3	16,74	2,03	2,87E-3	6,74E-4	36,44	2,67
<b><i>CR</i></b>	<b>3,21E-2</b>	<b>5,80E-3</b>	<b>7,22</b>	<b>1,63</b>	<b>1,36E-2</b>	<b>2,28E-3</b>	<b>16,52</b>	<b>2,89</b>	<b>3,29E-3</b>	<b>7,99E-4</b>	<b>34,62</b>	<b>3,83</b>
<i>Cp</i>	4,60E-2	4,33E-3	3,92	0,39	2,17E-2	1,51E-3	8,54	0,65	9,62E-3	7,09E-4	17,20	0,97
<i>AIC</i>	4,16E-2	1,90E-2	6,60	1,57	1,54E-2	1,73E-3	13,06	1,72	7,89E-3	8,47E-4	19,88	1,47
<i>MDL</i>	4,12E-2	3,98E-3	4,52	0,58	2,20E-2	2,08E-3	8,44	0,81	1,81E-2	7,06E-4	10,06	0,37

**Таблица 2.** Среднее значение ошибки решения и его средноквадратичное отклонение, среднее значение  $k$  и его средноквадратичное отклонение при размерности матрицы  $100 \times 100$

Задача	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(E)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
<i>Phillips</i>	$nl = 1E - 4$				$nl = 1E - 5$				$nl = 1E - 6$			
<i>E</i>	1,24E-4	3,25E-5	15,9	1,94	2,46E-5	4,55E-6	23,00	1,90	7,92E-6	5,36E-7	33,76	2,49
<b><i>CR</i></b>	<b>1,48E-4</b>	<b>4,51E-5</b>	<b>14,4</b>	<b>2,45</b>	<b>2,88E-5</b>	<b>9,04E-6</b>	<b>22,64</b>	<b>2,35</b>	<b>8,42E-6</b>	<b>8,81E-7</b>	<b>33,52</b>	<b>3,10</b>
<i>Cp</i>	1,75E-4	6,60E-5	12,0	0,14	4,98E-5	7,41E-7	17,00	0,0	1,47E-5	3,71E-6	24,12	1,67
<i>AIC</i>	5,07E-4	1,31E-3	13,5	3,22	3,61E-5	1,55E-5	21,74	2,17	8,86E-6	9,35E-7	31,02	1,96
<i>MDL</i>	1,66E-4	8,05E-6	12,0	0,0	6,49E-5	3,81E-5	16,30	1,75	2,17E-5	6,70E-8	21,00	0,0
<i>Carasso</i>	$nl = 1E - 4$				$nl = 1E - 5$				$nl = 1E - 6$			
<i>E</i>	1,88E-2	4,07E-3	24,2	1,75	2,51E-3	3,00E-4	33,32	1,97	1,15E-3	1,07E-4	50,68	3,89
<b><i>CR</i></b>	<b>2,02E-2</b>	<b>5,42E-3</b>	<b>24,2</b>	<b>1,68</b>	<b>2,63E-3</b>	<b>3,95E-4</b>	<b>32,68</b>	<b>2,16</b>	<b>1,27E-3</b>	<b>1,53E-4</b>	<b>48,00</b>	<b>5,58</b>
<i>Cp</i>	5,92E-2	6,85E-3	16,9	0,30	1,04E-2	4,48E-5	24,00	0,0	2,02E-3	1,76E-4	31,50	1,37
<i>AIC</i>	2,84E-2	1,99E-2	23,7	1,76	2,88E-3	3,69E-4	30,52	0,84	1,39E-3	4,78E-5	38,88	2,57
<i>MDL</i>	5,70E-2	6,27E-4	17,0	0,14	1,04E-2	4,48E-5	24,00	0,0	2,08E-3	2,43E-6	31,00	0,0
<i>Delves</i>	$nl = 1E - 5$				$nl = 1E - 6$				$nl = 1E - 7$			
<i>E</i>	1,34E-2	1,04E-3	17,3	2,38	5,98E-3	3,98E-4	37,36	3,63	1,94E-3	2,36E-4	78,26	6,65
<b><i>CR</i></b>	<b>1,49E-2</b>	<b>2,21E-3</b>	<b>16,5</b>	<b>3,34</b>	<b>6,33E-3</b>	<b>5,48E-4</b>	<b>34,98</b>	<b>4,60</b>	<b>2,05E-3</b>	<b>2,76E-4</b>	<b>74,56</b>	<b>8,06</b>
<i>Cp</i>	2,35E-2	1,26E-3	8,12	0,48	1,14E-2	4,77E-4	16,94	0,71	5,28E-3	2,30E-4	34,12	1,24
<i>AIC</i>	1,85E-2	1,06E-2	15,1	3,11	7,03E-3	6,21E-4	29,70	3,34	3,33E-3	2,03E-4	48,88	2,28
<i>MDL</i>	2,04E-2	1,34E-3	9,50	0,68	1,10E-2	7,76E-4	17,62	1,28	8,94E-3	2,58E-4	21,30	0,58

ошибки уменьшается, а стохастическая возрастает.

Предложенное приближение ошибки восстановления вектора данных близко к истинным значениям аппроксимируемой ошибки. Исходя из этого предложенный критерий выбора оптимального числа компонент сингулярного разложения  $CR$ , основанный на аппроксимации ошибки восстановления вектора данных, мож-

но использовать для определения оптимального числа компонент сингулярного разложения.

Экспериментальное исследование точности решения дискретных некорректных задач с использованием предложенного критерия подтверждает его эффективность – в сравнении с решениями на основе таких критериев как  $Cp$ ,  $AIC$  и  $MDL$  решение на основе  $CR$  демонстрирует наибольшую точность.

Окончание на стр. 26

1. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач – М.: Наука, 1979. – 285 с.
2. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач – М.: Наука, 1987. – 239 с.
3. Hansen P.C. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 247 p.
4. Hansen P.C. Truncated SVD solutions to discrete ill-posed problems with ill-determined numerical rank // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1990. – № 11. – P. 503–518.
5. Regularization by truncated total least squares / R.D. Fierro, G.H. Golub, P.C. Hansen et al. // Ibid. – 1997. – № 18. – P. 1223–1241.
6. Golub G.H., Van Loan C.F. Matrix Computations. – Baltimore: Johns Hopkins University Press, MD, 1996. – 350 p.
7. Demmel J.W. Applied Numerical Linear Algebra. – Philadelphia: SIAM, 1997. – 419 p.
8. Ивахненко А.Г., Степашико В.С. Помехоустойчивость моделирования. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
9. Mallows C.L. Some comments on Cp // Technometrics. – 1973. – **15**, № 4. – P. 661–675.
10. Akaike H. A new look at the statistical model identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – **19**, № 6. – P. 716–723.
11. Hansen P.C. Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. – 1994. – **6**. – P. 1–35.
12. Hansen M., Yu B. Model selection and minimum description length principle // J. Amer. Statist. Assoc. – 2001. – **96**. – P. 746–774.

Поступила 02.10.2014

E-mail: helab@i.com.ua, avtyshcuk@gmail.com

© Е.Г. Ревунова, А.В. Тищук, 2014

