

Е.Г. Ревунова

## Исследование метода решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования

Проведено аналитическое исследование составляющих ошибки восстановления истинного сигнала. Предложен критерий выбора оптимальной размерности случайного проектора, основанный на аппроксимации ошибки восстановления сигнала выхода. Проведено исследование предложенного критерия.

An analytical study of the component error of true signal reconstruction is done. The criterion for selecting the optimal dimension of the random projector based on the signal output reconstructions is suggested. The investigation of the proposed criterion is conducted.

Проведено аналітичне дослідження складових помилок відновлення істинного сигналу. Запропоновано критерій вибору оптимальної розмірності випадкового проектора, заснований на апроксимації помилки відновлення сигналу виходу. Проведено дослідження запропонованого критерію.

**Введение.** Решение некорректных задач актуально для многих областей науки и техники. Дискретные некорректные задачи возникают, например, при дискретизации интегральных уравнений в таких областях, как спектрометрия, гравиметрия, магнитометрия, электроразведка и др.

Известно, что решение дискретной некорректной обратной задачи как задачи наименьших квадратов неустойчиво. Эта особенность проявляется в том, что малым изменениям в векторе данных (измерений) соответствуют большие изменения в векторе решения; при этом велико значение ошибки решения. Для преодоления неустойчивости и, соответственно, повышения точности решения используют методы регуляризации. Недостатки, присущие методам регуляризации, – это высокая вычислительная сложность и сложность подбора правильного параметра регуляризации, от чего в значительной мере зависит устойчивость решения.

Для преодоления нестабильности и повышения точности решения дискретных некорректных задач предложен подход, использующий случайное проецирование [1–4].

Экспериментальное исследование метода решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования [3, 4], показало наличие оптимальной размерности случайного проектора, такой, при которой ошибка восстановления истинного сигнала близка к минимальной. Показано, что ошибка формируется из двух составляющих: *стохастической* (возрастающей с ростом размерности проектора) и *де-*

*терминированной* (убывающей с ростом размерности проектора), создавая тем самым предпосылки для существования минимума ошибки при соответствующей размерности проектора. Поведение составляющих ошибки подтверждено обширным экспериментальным материалом, однако аналитическое исследование составляющих ошибки восстановления истинного сигнала проведено не было.

Подход к определению оптимальной размерности случайного проектора, основанный на использовании критериев выбора модели, обеспечивает хорошую точность, однако оставляет некоторую неопределенность в том, какой именно критерий выбора модели использовать. Поскольку для метода решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования сформулированы как выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала, так и выражение среднеквадратичной ошибки восстановления сигнала выхода – становится актуальной задача формулирования критерия выбора модели, ориентированного на аппроксимацию ошибки восстановления сигнала выхода, непосредственно для метода на основе случайного проецирования.

### Восстановление истинного сигнала с использованием ортогонального случайного проектора

Во многих практических приложениях преобразование сигнала описывается линейной моделью вида:

$$Ax \approx y, \quad (1)$$

где матрица  $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  и вектор  $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^N$ , искаженный аддитивным шумом  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^N$ :  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ , известны. Матрица  $\mathbf{A}$  обладает свойствами, характерными для дискретной некорректной обратной задачи, и требуется оценить вектор сигнала  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ .

Для решения на основе проекционного подхода обе части исходного уравнения (1) умножим на матрицу  $\boldsymbol{\Omega} \in \mathfrak{R}^{k \times N}$  и получим уравнение

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \text{ где } \mathbf{F} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}, \mathbf{F} \in \mathfrak{R}^{k \times N},$$

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^k. \quad (2)$$

Матрицу  $\boldsymbol{\Omega}$  получим как  $\mathbf{G} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Omega}^T$ , где  $\boldsymbol{\Omega}$  – ортонормированная матрица,  $\boldsymbol{\Sigma}$  – диагональная. Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  – реализация случайной величины с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией,  $k \leq N$ .

Тогда задача наименьших квадратов запишется в виде

$$\mathbf{x}' = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{F}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2. \quad (3)$$

Восстановление сигнала  $\mathbf{x}$  на основе псевдообращения получим как

$$\mathbf{x}'_G = \mathbf{F}^+ \mathbf{b}. \quad (4)$$

Точность решения обратной задачи будем оценивать с помощью ошибки  $e$  восстановления истинного сигнала  $\mathbf{x}$ , вычисляемой как  $e = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathbf{e}\|$ , где  $\mathbf{x}'$  – вектор восстановленного сигнала.

Запишем выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала при проецировании случайной матрицей  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$e_{xG} = E \left\| (\mathbf{F}^+ \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 + E \left\| \mathbf{F}^+ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 +$$

$$+ 2E \langle (\mathbf{F}^+ \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{F}^+ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (5)$$

Так как  $2E \langle (\mathbf{F}^+ \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{x}, \mathbf{F}^+ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$  и

$$E \left\| \mathbf{F}^+ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{F}^{+T} \mathbf{F}^+ \boldsymbol{\Omega}), \text{ то}$$

$$e_{xG} = E \left\| (\mathbf{F}^+ \mathbf{F} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 + \sigma^2 \text{trace}(\boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{F}^{+T} \mathbf{F}^+). \quad (6)$$

Восстановление сигнала на основе псевдообращения с использованием QR-разложения матрицы  $\mathbf{G}\mathbf{A}$  получим как

$$\mathbf{x}'_Q = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  получаются QR-разложением матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ .

В результате проецирования составляющие ошибки решения принимают следующий вид:

$$\mathbf{e}_{xQ} = \mathbf{x}'_Q - \mathbf{x} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y} - \mathbf{x} =$$

$$= (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \mathbf{x} = \quad (8)$$

$$= ((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} + (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Составляющие ошибки:

$$\mathbf{e}_{1xQ} = ((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x},$$

$$\mathbf{e}_{2xQ} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (9)$$

Запишем выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала. Учитывая, что

$$E(\mathbf{e}_{2xQ}) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T) =$$

$$= \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+),$$

выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления истинного сигнала таково:

$$e_{xQ} = \left\| ((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{x} \right\|^2 +$$

$$+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^{+T} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \quad (10)$$

Число столбцов  $N$  проекционных матриц  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\mathbf{Q}$  определяется размерностью исходной матрицы  $\mathbf{A}$ , число строк  $k$  априори не фиксировано и может изменяться от одного до  $N$ . Поведение зависимости составляющих ошибки (6), (10) от числа строк матрицы проектора требует аналитического исследования.

### Исследование зависимости стохастической составляющей ошибки восстановления истинного сигнала от числа строк матрицы проектора

Исследуем зависимость величины стохастической составляющей ошибки решения дискретной некорректной задачи от числа строк матрицы проектора  $\boldsymbol{\Omega}$ . Стохастическая составляющая ошибки есть:

$$E \left\| \mathbf{F}_k^+ \boldsymbol{\Omega}_k \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\boldsymbol{\Omega}_k^T \mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+ \boldsymbol{\Omega}_k).$$

Для исследования зависимости стохастической составляющей ошибки от  $k$ , запишем выражение для  $\boldsymbol{\Omega}_k^T \mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+ \boldsymbol{\Omega}_k$  в рекурсивном

виде. Для этого, воспользовавшись свойством цикличности следа произведения матриц  $\text{trace}(\mathbf{ABC}) = \text{trace}(\mathbf{BCA}) = \text{trace}(\mathbf{CAB})$  [5], перепорядочим выражение  $\mathbf{\Omega}_k^T \mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+ \mathbf{\Omega}_k$  и получим:

$$\mathbb{E} \left\| \mathbf{F}_k^+ \mathbf{\Omega}_k \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{\Omega}_k \mathbf{\Omega}_k^T \mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+). \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{\Omega}_k \mathbf{\Omega}_k^T = \mathbf{I}$  в силу ортонормированности матрицы  $\mathbf{\Omega}$ .

С целью исследования зависимости стохастической составляющей ошибки от  $k$ , запишем выражение для  $\mathbf{F}_k^+$  в рекурсивном виде. Для  $\mathbf{F}_k^+$  воспользуемся представлением возмущения псевдообратной матрицы через возмущение исходной матрицы, предложенным в [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^+ - \mathbf{A}^+ &= -\mathbf{B}^+ \mathbf{P}_B \mathbf{E} \mathbf{R}_A \mathbf{A}^+ + \\ &+ \mathbf{B}^+ \mathbf{P}_B \mathbf{P}_A^\perp - \mathbf{R}_B^\perp \mathbf{R}_A \mathbf{A}^+, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{E}$  – матрица возмущения,  $\mathbf{P}_A = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$ ,  $\mathbf{R}_A = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$ ,  $\mathbf{R}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{R}_A$ .

В качестве возмущения матрицы  $\mathbf{F}_{k-1}$  будем рассматривать матрицу, содержащую строку, которая добавляется на  $k$ -м шаге  $\mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{E}_k = \mathbf{F}_k$ . Матрица возмущения формируется следующим образом:  $\mathbf{E}_k = [\mathbf{O}_k : \mathbf{e}_k]$ , где  $\mathbf{e}_k = \boldsymbol{\omega}_k \mathbf{A}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_k$  – строка матрицы проектора  $\mathbf{\Omega}_k = [\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_k]$ .

Выражение (12) для данного случая можно записать так:

$$\mathbf{F}_k^+ = [\mathbf{F}_{k-1}^+ : \mathbf{0}] - [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}] + [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k], \quad (13)$$

где  $\mathbf{M}_k = \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1} \mathbf{F}_{k-1}^+$ ,  $\mathbf{P}_{Fk} = \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^+$ ,  $\mathbf{R}_{Fk-1} = \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}$ ,  $\mathbf{P}_{Fk-1}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^+$ ,  $\mathbf{t}_k = \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{P}_{Fk-1}^\perp$ .

Используя (13), запишем рекурсивное выражение для  $\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+ &= [\mathbf{F}_{k-1}^+ : \mathbf{0}]^T [\mathbf{F}_{k-1}^+ : \mathbf{0}] + \\ &+ [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}]^T [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}] - [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}]^T [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k] - \\ &- [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k]^T [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}] + [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k]^T [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k], \end{aligned}$$

где  $[\mathbf{F}_{k-1}^+ : \mathbf{0}]^T [\mathbf{F}_{k-1}^+ : \mathbf{0}] + [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}]^T [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}$ ,

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{F}_{k-1}^{+T} \mathbf{F}_{k-1}^+ + \mathbf{M}_k^T \mathbf{M}_k. \quad (14)$$

Отметим, что матрица  $\mathbf{B}_k$  имеет положительные элементы на диагонали, так как диагонали  $\mathbf{F}_{k-1}^{+T} \mathbf{F}_{k-1}^+$  и  $\mathbf{M}_k^T \mathbf{M}_k$  – положительны.

$$[\mathbf{M}_k : \mathbf{0}]^T [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k] = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_k & \mathbf{c}_k \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k]^T [\mathbf{M}_k : \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_k^T & 0 \end{bmatrix},$$

элементы вектора  $\mathbf{c}_k$  могут быть как положительны, так и отрицательны, но это не влияет на диагональ матрицы  $\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+$ , поскольку размерность вектора  $\mathbf{c}_k$  есть  $k-1$ . Элемент диагонали матрицы  $\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+$ , получаемый

$$\text{на } k\text{-м шаге, есть: } [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k]^T [\mathbf{O}_k : \mathbf{t}_k] = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & d_k \end{bmatrix},$$

$d_k = \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_k$ . Элемент  $d_k$  – положителен.

$$\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k & \mathbf{c}_k \\ \mathbf{c}_k^T & d_k \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Из выражений (14) и (15) следует, что матрица  $\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+$  имеет положительную диагональ и рекурсивно (14) изменяющуюся подматрицу  $\mathbf{B}_k$ . Следовательно, значение стохастической составляющей ошибки ( $\sigma^2 \text{trace}(\mathbf{F}_k^{+T} \mathbf{F}_k^+)$ ) возрастает с ростом  $k$ .

**Исследование зависимости детерминированной составляющей ошибки восстановления истинного сигнала от числа строк матрицы проектора**

Рассмотрим зависимость величины детерминированной составляющей ошибки  $\|(\mathbf{F}^+ \mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2$  от числа строк матрицы проектора:

$$\begin{aligned} e_1 &= \|(\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = \|(\mathbf{R}_{Fk} - \mathbf{I})\mathbf{x}\|^2 = \\ &= (\mathbf{R}_{Fk} \mathbf{x} - \mathbf{x})^T (\mathbf{R}_{Fk} \mathbf{x} - \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая, что в силу ортогональности проектора  $\mathbf{R}_{Fk}^T \mathbf{R}_{Fk} = \mathbf{R}_{Fk}$ , получим:

$$\begin{aligned} e_1 &= \mathbf{x}^T \mathbf{R}_{Fk} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{Fk} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_{Fk} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя (13), запишем рекурсивное выражение для  $\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k$ . Учитывая, что  $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ ,

$\mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{E}_k = 0$ ,  $\mathbf{F}_2 \mathbf{E}_k = 0$ , получим выражение следующего вида:

$$\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{F}_1 \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_{k-1}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{F}_2 = [\mathbf{M}_k; \mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{F}_1 = [\mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{t}_k]$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_{k-1} = & \left[ \mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{P}_{Fk-1}^\perp \right] \mathbf{E}_k - \\ & - \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Учитывая, что  $\mathbf{R}_{Fk-1} \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{R}_{Fk-1}$ , получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_{k-1} = & \left[ \mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{Fk-1}) \right] \mathbf{E}_k - \\ & - \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_{k-1} = \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k - \quad (21)$$

$$- \left[ \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{P}_{Fk-1}; \mathbf{0} \right] \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1},$$

где  $\mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ . Поскольку

$\left[ \mathbf{F}_k^+ \mathbf{P}_{Fk} \mathbf{P}_{Fk-1}; \mathbf{0} \right] \mathbf{E}_k = 0$  и  $\mathbf{P}_{Fk} = \mathbf{I}_k$  приходим к выражению следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 \mathbf{E}_k - \mathbf{F}_2 \mathbf{F}_{k-1} = & \mathbf{F}_k^+ (\mathbf{E}_k - \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}) = \\ = & \mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{Fk-1}) = \mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp. \end{aligned} \quad (22)$$

Произведение  $\mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp$  представляет собой матрицу вида  $[\mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{m}_k]^\top$ , поэтому  $\mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp$  формируется как произведение последнего столбца матрицы  $\mathbf{F}_k^+$  ( $[\mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{f}_k^+]$ ) на  $[\mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{m}_k]^\top$ . В работе [7] приведено следующее выражение для последнего столбца матрицы  $\mathbf{F}_k^+$ :

$$[\mathbf{O}_{k-1}; \mathbf{f}_k^+] = \frac{\mathbf{R}_{Fk-1}^\perp \mathbf{E}_k^\top}{z}, \quad (23)$$

где  $z = \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp \mathbf{E}_k^\top$ . Используя (23), запишем  $\mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp$  так:

$$\mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp = \frac{\mathbf{R}_{Fk-1}^\perp \mathbf{E}_k^\top \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp}{z} = \mathbf{N}_k. \quad (24)$$

Из (24) следует, что  $\mathbf{N}_k$  – квадратная матрица, симметричная относительно диагонали.

Используя (22), запишем (18):

$$\mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{F}_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{Fk-1}^\perp = \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} + \mathbf{N}_k. \quad (25)$$

Для детерминированной составляющей ошибки  $e_1 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x}$  запишем:

$$\begin{aligned} e_1 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x} = & \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - (\mathbf{x}^\top \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{N}_k \mathbf{x}) = \\ = & \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - (\mathbf{x}^\top \mathbf{F}_{k-1}^+ \mathbf{F}_{k-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{N}_k^{1/2\top} \mathbf{N}_k^{1/2} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку  $\mathbf{x}^\top \mathbf{N}_k^{1/2\top} \mathbf{N}_k^{1/2} \mathbf{x} > 0$ , значение  $\mathbf{x}^\top \mathbf{F}_k^+ \mathbf{F}_k \mathbf{x}$  возрастает с ростом  $k$ , а значение детерминированной составляющей ошибки  $e_1$  – убывает.

**Поведение составляющих ошибки при проецировании матрицей  $\mathbf{Q}$**

Рассмотрим поведение детерминированной  $\|((\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+ (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k - \mathbf{I}) \mathbf{x}\|^2$  и стохастической  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^{+\top} (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+)$  составляющих ошибки при восстановлении истинного сигнала на основе проецирования матрицей  $\mathbf{Q}$ .

Матрицу  $(\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k$  представим следующим образом:  $(\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1} + \mathbf{E}_k = (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k$ . Матрица возмущения  $\mathbf{E}_k$  формируется так:  $\mathbf{E}_k = [\mathbf{O}_k; \mathbf{e}_k]$ , где  $\mathbf{e}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{q}_k$  – строка матрицы проектора  $\mathbf{Q}_k = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k]$ . Для преобразования матрицы  $\mathbf{F}_k = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k]$  в  $\mathbf{Q}_k$  используем процедуру Грама–Шмидта:

$$\mathbf{q}_k = \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}, \quad \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{f}_k \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle} \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{f}_1. \quad (27)$$

Используя для детерминированной составляющей ошибки рассуждения, аналогичные (18)–(25), получим:

$$\begin{aligned} e_1 = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+ (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k \mathbf{x} = & \mathbf{x}^\top \mathbf{x} - \\ - & (\mathbf{x}^\top (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1}^+ (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \mathbf{T}_k^{1/2\top} \mathbf{T}_k^{1/2} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\mathbf{T}_k = (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{k-1}^\perp$ ,  $\mathbf{R}_{k-1}^\perp = \mathbf{I} - (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1}^+ (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1}$ ,  $\mathbf{T}_k$  – квадратная матрица, симметричная диагонали.

Поскольку  $\mathbf{x}^\top \mathbf{T}_k^{1/2\top} \mathbf{T}_k^{1/2} \mathbf{x} > 0$ , значение  $\mathbf{x}^\top (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+ (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k \mathbf{x}$  возрастает с ростом  $k$ , а значение детерминированной составляющей ошибки – убывает.

Для стохастической составляющей ошибки рассуждения, аналогичные (13)–(15), приводят к выражению вида

$$e_2 = \text{trace}((\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^{+\top} (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+) = \text{trace} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k & \mathbf{a}_k \\ \mathbf{a}_k^\top & p_k \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^{+\top} (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_k^+ = \\ & = (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1}^{+\top} (\mathbf{Q}^\top \mathbf{A})_{k-1}^+ + \mathbf{C}_k^\top \mathbf{C}_k = \mathbf{Z}_k, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $C_k = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^+ \mathbf{E}_k \mathbf{R}_{k-1} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_{k-1}^+$ ,  $p_k = \mathbf{t}_k^T \mathbf{t}_k$ ,  $\mathbf{t}_k = (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^+ \mathbf{P}_{k-1}^\perp$ . Элемент  $p_k$  – положителен.

Из выражений (29), (30) следует, что матрица  $(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^{+T} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^+$  имеет положительную диагональ и рекурсивно (30) изменяющуюся подматрицу  $\mathbf{Z}_k$ .

Следовательно, значение стохастической составляющей ошибки  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^{+T} (\mathbf{Q}^T \mathbf{A})_k^+)$  возрастает с ростом  $k$ .

Поведение составляющих ошибки восстановления истинного сигнала в зависимости от размерности проекционной матрицы, полученных с использованием матриц  $\mathbf{\Omega}$  и  $\mathbf{Q}$ , было исследовано экспериментально [3, 4]. Эксперименты подтвердили, что при возрастании  $k$  детерминированная составляющая ошибки уменьшается, а стохастическая возрастает, так что суммарная зависимость ошибки от  $k$  имеет минимум.

Пример этих зависимостей для дискретной некорректной задачи Phillips [8] при уровнях шума  $1\text{E}-2$ ,  $1\text{E}-3$ ,  $1\text{E}-4$  приведен на рис. 1 и 2.

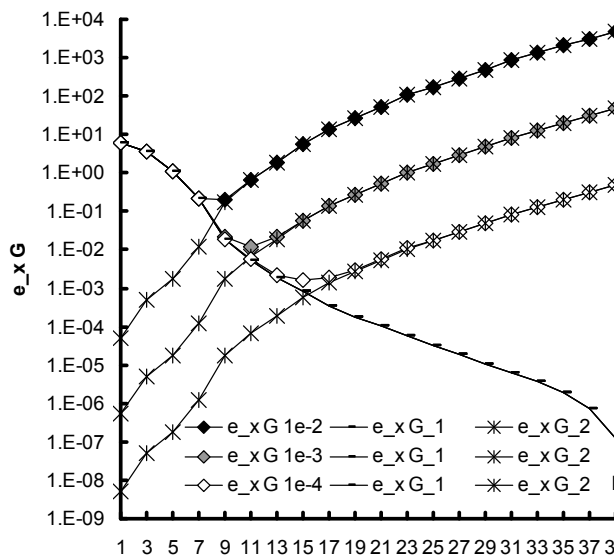


Рис. 1. Зависимость ошибки решения  $e_{xG}$  и ее составляющих от  $k$

Для получения решения с минимальной ошибкой необходимо использовать проекционную матрицу с размерностью  $k$ , близкой к оптимальной. Однако определение оптимального значения  $k$  по графикам зависимости ошибки восстановления истинного сигнала от  $k$  представляет только теоретический интерес,

так как выражение включает в себя вектор истинного решения, который при решении практических задач неизвестен.

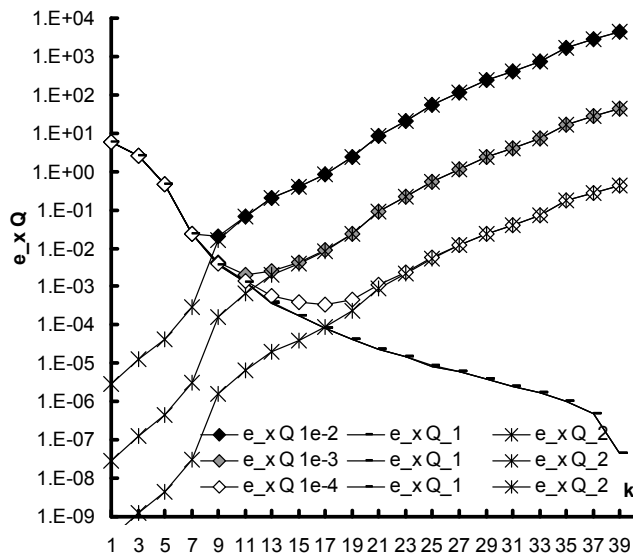


Рис. 2. Зависимость ошибки решения  $e_{xQ}$  и ее составляющих от  $k$

### Подход к определению оптимальной размерности матрицы проектора

Оптимальной размерностью матрицы проектора называем такую размерность ( $k \times N$ ), при которой ошибка восстановления истинного сигнала минимальна. Поскольку в реальных условиях ошибку восстановления истинного сигнала вычислить невозможно (из-за отсутствия данных об истинном сигнале), предлагаем использовать ошибку восстановления вектора выхода  $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0\|$ .

Рассмотрим эту ошибку в случае, когда в качестве проектора используется матрица  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{yG} &= \mathbf{y}'_G - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega} \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{y}_0 = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления выхода выглядит так:

$$\begin{aligned} e_{yG} &= \left\| (\mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega} - \mathbf{I}) \mathbf{y}_0 \right\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega})^T \mathbf{A}\mathbf{F}^+ \mathbf{\Omega}). \end{aligned} \quad (32)$$

Использовать для определения минимума ошибки непосредственно выражение (32) невозможно из-за наличия в нем вектора  $\mathbf{y}_0$ , который в реальных условиях неизвестен. Заменим в (32) неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0$  на извест-

ный  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$  (полученный, например, в результате измерений) и проведем усреднение по реализациям шума:

$$e'_{y_G} = \|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})(\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})\|^2 + \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega})^T \mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega}), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} E\{e'_{y_G}\} &= \|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \\ &+ E\|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 + \\ &+ 2E\langle (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0, (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega})^T \mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая, что

$$2E\langle (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0, (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} E\|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 &= \\ &= \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})), \end{aligned}$$

выражение (34) принимает вид

$$\begin{aligned} E\{e'_{y_G}\} &= \|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega})^T \mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (35)$$

Сопоставив выражение для  $E\{e'_{y_G}\}$  и выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления выхода (32), видим, что они отличаются одним слагаемым:

$$\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})).$$

Этот факт позволяет скорректировать вклад шума в  $E\|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2$  путем вычитания  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I}))$  и получить аппроксимацию выражения (32), не содержащую неизвестного вектора  $\mathbf{y}_0$ :

$$\begin{aligned} CR_G &= E\|(\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2 - \\ &- \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega} - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega})^T \mathbf{A}\mathbf{F}^+\boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (36)$$

Рассмотрим ошибку восстановления вектора выхода в случае, когда в качестве проектора используется матрица  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{e}_{y_Q} = \mathbf{y}'_0 - \mathbf{y}_0 =$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{y}_0 = \\ &= (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (37)$$

Выражение для среднеквадратичной ошибки восстановления выхода имеет вид:

$$\begin{aligned} e_{y_Q} &= \|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \end{aligned} \quad (38)$$

Заменим в (38) неизвестный вектор  $\mathbf{y}_0$  на  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} e'_{y_Q} &= \|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})(\mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \end{aligned} \quad (39)$$

Усредним (39) по реализациям шума:

$$\begin{aligned} E\{e'_{y_Q}\} &= \|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}_0\|^2 + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})^T \times \\ &\times (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \end{aligned} \quad (40)$$

Получим аппроксимацию ошибки восстановления выхода (38), скорректировав вклад шума в  $E\|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2$  путем вычитания  $\sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})^T (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I}))$ :

$$\begin{aligned} CR_Q &= E\|(\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})\mathbf{y}\|^2 - \\ &- \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})^T \times \\ &\times (\mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{Q}^T - \mathbf{I})) + \\ &+ \sigma^2 \text{trace}((\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{A}(\mathbf{Q}^T \mathbf{A})^+). \end{aligned} \quad (41)$$

Получены выражения, аппроксимирующие ошибку восстановления выхода для случая, когда в качестве проектора используется матрица  $\boldsymbol{\Omega}$  (36) и для случая, когда проецирование осуществляется посредством матрицы  $\mathbf{Q}$  (41). Вместо неизвестного вектора  $\mathbf{y}_0$  в выражения входит известный вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ , поэтому  $CR_G$  и  $CR_Q$  можно использовать для определения оптимальной размерности матрицы проектора.

### Эксперимент

Исследование проведено на примере известных дискретных некорректных задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves* [8]. В таблице приведены результаты для решения с проецированием непосред-

ственно случайной матрицей  $\Omega$  (13) и матрицей  $Q$  после ортогонализации  $QR$ . Приведены результаты (средние и с.к.о.), полученные при 500 случайных реализациях проекционных матриц и трех уровнях шума в  $y$ .

Среднее значение  $M(e)$  и с.к.о. ошибки решения вычислялись для случаев определения оптимальной размерности матрицы проектора по критериям выбора модели (Маллоуза  $C_p$ , Акаике  $AIC$ , минимальной длины описания  $MDL$ ) и по критериям  $CR_G$  и  $CR_Q$ .

Анализ результатов показал, что наименьшее значение ошибки решения обеспечивается при использовании критерия  $CR_G$ . Критерий  $CR_Q$  дает ошибку, близкую к минимальной (на уровне критерия Акаике).

**Заключение.** Исследование составляющих ошибки восстановления истинного сигнала при решении дискретных некорректных задач методом случайного проецирования показало, что при возрастании размерности случайного проектора  $k$  детерминированная составляющая ошибки уменьшается, а стохастическая возрастает, создавая тем самым предпосылки для существования минимума ошибки при  $k < N$ .

Предложенный критерий выбора оптимальной размерности случайного проектора, использующий аппроксимацию ошибки восстановления выхода, обеспечивает наименьшее значение ошибки решения дискретной некорректной задачи в сравнении с решениями, полученными по критериям Маллоуза, Акаике и критерию минимальной длины описания.

Среднее  $M(e)$  и с.к.о. ошибки решения  $e$ ,  $M(k)$  и с.к.о. выбранной размерности  $k$  для задач *Carasso*, *Phillips*, *Delves*

Phillips	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.	$M(e)$	с.к.о.	$M(k)$	с.к.о.
	nl=1E-3				nl=1E-4				nl=1E-5			
e G	0,0072	0,0048	10,88	1,62	0,0011	0,0005	15,46	2,00	0,00065	0,00026	17,26	2,15
CR G	<b>0,0099</b>	<b>0,0089</b>	10,30	1,47	<b>0,0014</b>	<b>0,0012</b>	15,05	2,12	<b>0,00087</b>	<b>0,00056</b>	17,12	2,17
Cp G	0,0126	0,0170	11,02	1,72	0,0015	0,0014	15,18	2,26	0,00095	0,00085	17,11	2,49
AIC G	0,0233	0,0506	12,32	2,11	0,0019	0,0019	16,19	2,36	0,00105	0,00102	17,99	2,47
MDL G	0,0100	0,0088	10,26	1,55	0,0017	0,0013	12,72	1,94	0,00136	0,00122	13,20	2,16
e Q	0,0014	0,0005	11,64	1,14	0,00031	0,00005	17,05	1,59	0,00026	0,00003	18,29	1,50
CR Q	0,0017	0,0008	9,90	0,88	0,00035	0,00007	14,25	1,19	0,00034	0,00059	15,54	1,20
Cp Q	0,0043	0,0017	8,27	0,85	0,00056	0,00018	12,26	1,31	0,00037	0,00009	13,99	1,46
AIC Q	0,0017	0,0007	10,72	1,04	0,00036	0,00007	14,91	1,28	0,00030	0,00004	15,90	1,37
MDL Q	0,0042	0,0017	8,31	0,89	0,00070	0,00028	11,59	1,19	0,00058	0,00024	12,12	1,46
Carasso	nl=1E-3				nl=1E-4				nl=1E-5			
e G	0,3253	0,1305	12,69	2,34	0,0463	0,0173	23,06	2,90	0,0225	0,0079	27,19	3,20
CR G	<b>0,4052</b>	<b>0,2109</b>	11,98	2,08	<b>0,0563</b>	<b>0,0233</b>	22,24	2,85	<b>0,0275</b>	<b>0,0101</b>	25,82	2,99
Cp G	0,4246	0,2015	10,55	2,50	0,0589	0,0231	20,35	3,14	0,0293	0,0112	23,38	3,00
AIC G	0,4642	0,3615	13,17	2,55	0,0583	0,0249	20,65	2,82	0,0354	0,0198	21,84	2,80
MDL G	0,4210	0,2083	10,93	2,67	0,1114	0,0745	15,38	3,14	0,0967	0,0752	15,97	3,41
e Q	0,1014	0,0314	15,25	1,91	0,0162	0,0058	22,10	2,07	0,0087	0,0029	25,10	2,36
CR Q	0,1344	0,1545	11,81	1,24	0,0321	0,0223	19,59	1,64	0,0137	0,0064	22,36	1,76
Cp Q	0,2307	0,1012	9,93	1,61	0,0371	0,0198	16,74	2,20	0,0187	0,0081	19,26	1,94
AIC Q	0,1351	0,0432	12,46	1,49	0,0220	0,0084	19,34	1,76	0,0142	0,0064	20,82	1,97
MDL Q	0,1743	0,0637	11,01	1,44	0,0623	0,0410	14,72	2,65	0,0493	0,0385	15,72	2,92
Delves	nl=1E-5				nl=1E-6				nl=1E-7			
e G	0,0407	0,0125	6,6	1,88	0,0199	0,0043	13,02	2,73	0,0028	0,0003	38,40	2,17
CR G	<b>0,0492</b>	<b>0,0219</b>	6,17	1,62	<b>0,0233</b>	<b>0,0069</b>	11,91	2,55	<b>0,0045</b>	<b>0,0012</b>	31,14	4,34
Cp G	0,0521	0,0315	5,958	1,86	0,0236	0,0088	10,35	2,29	0,0079	0,0023	21,20	3,80
AIC G	0,0973	0,1560	8,956	2,60	0,0262	0,0142	13,54	2,92	0,0093	0,0028	19,01	3,20
MDL G	0,0516	0,0296	5,992	1,95	0,0255	0,0070	8,55	2,25	0,0196	0,0066	10,11	2,79
e Q	0,0260	0,0038	8,632	1,90	0,0127	0,0020	16,20	2,29	0,0028	0,0003	38,06	2,58
CR Q	0,0341	0,0136	8,368	1,13	0,0201	0,0217	12,74	1,53	0,0032	0,0006	27,22	2,46
Cp Q	0,0365	0,0071	4,79	0,99	0,0202	0,0033	8,78	1,56	0,0087	0,0017	17,60	2,42
AIC Q	0,0320	0,0073	9,55	1,38	0,0148	0,0031	12,89	1,97	0,0079	0,0018	18,88	2,54
MDL Q	0,0335	0,0066	5,332	1,21	0,0214	0,0045	8,19	1,77	0,0177	0,0047	9,73	2,37

Окончание статьи на стр. 60

1. *Revunova E.G., Rachkovskij D.A.* Using randomized algorithms for solving discrete ill-posed problems // INFORMATION THEORIES & APPLICATIONS. – 2009. – **16**. – № 2. – P. 176–192.
2. *Ревунова Е.Г., Рачковский Д.А.* Повышение точности решения обратной задачи с использованием случайных проекций // 16-th Int. Conf. Knowledge-Dialogue-Solution. – 2009. – **10**. – P. 95–102.
3. *Ревунова Е.Г.* Исследование составляющих ошибки для решения обратной задачи с использованием случайных проекций // Математические машины и системы. – 2010. – № 4. – С. 33–42.
4. *Рачковский Д.А., Ревунова Е.Г.* Метод решения дискретных некорректных задач на основе случайного проецирования // Cybernetics and Systems Analysis. – 2012. – № 4. – P. 163–181.
5. *Demmel J.W.* Applied Numerical Linear Algebra / SIAM. – Philadelphia. – 1997. – 419 p.
6. *Stewart G.W.* On the perturbation of pseudo-inverses, projections and linear least squares problems // SIAM Review. – 1977. – **19**, N 4. – P. 634–662.
7. *Кириченко Н.Ф.* Аналитическое представление возмущений псевдообратных матриц. // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98–107.
8. *Hansen P.C.* Regularization Tools: A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems // Numer. Algorithms. – 1994. – **6**. – P. 1–35.

Поступила 04.07.2014

Тел. для справок: +38 044 502-6341 (Киев)

E-mail: [helab@i.com.ua](mailto:helab@i.com.ua)

© Е.Г. Ревунова, 2014

