

Е.Г. Ревунова

Устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом

Рассмотрен подход, обеспечивающий устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом для случая, когда матрица базисных функций исходной линейной системы имеет высокое число обусловленности, и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает к нулю. Исследовано поведение зависимости составляющих ошибки преобразования выхода от числа компонент сингулярного разложения.

An approach to a stable transformation of the output of a linear system to the output of a linear system with some particular basis is proposed. The case when the basal function matrix of the linear system output has got the high number of the conditionality and the singular numbers series is are fluently reducing to zero is presented. The dependence of the error components vs number of singular value decomposition component is studied.

Розглянуто підхід, що забезпечує стійке перетворення виходу лінійної системи у вихід системи з заданим базисом для випадку, коли матриця базисних функцій вихідної лінійної системи має високе число обумовленості, і низку її сингулярних чисел плавно спадає до нуля. Досліджено поведінку залежності складових помилки перетворення виходу від числа компонент сингулярного розкладання.

Введение. В приложениях, связанных с восстановлением сигналов по результатам неярких измерений, часто встречается следующая задача. Сигнал, излучаемый объектом измерения, поступает на вход линейной измерительной системы. Результат измерений (выход) системы представляет собой вектор измерений. Известна матрица линейного преобразования вход-выход, описывающая взаимодействие измеряемого сигнала со средой и особенности измерительных средств. Столбцы матрицы можно рассматривать как отсчеты дискретно заданных базисных функций линейной системы. Это, например, функции отклика детектора спектрометра. Набор базисных функций отражает свойства конкретной измерительной системы, поэтому не может быть произвольным. Соответственно, наблюдаемый выход, определяемый базисными функциями, может не соответствовать требованиям пользователя или быть не совместимым с методами дальнейшей обработки. В случае, если известен набор базисных функций, которые дали бы выход с необходимыми свойствами, можно поставить задачу поиска преобразования наблюдаемого выхода в выход системы с заданным базисом.

Существующие методы преобразования выхода [1] используют обращение матрицы и ориентированы на случай, когда матрица линейного преобразования исходной системы и ко-

вариационная матрица шума – не вырожденные. Если же матрица исходной системы имеет высокое число обусловленности, и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает до нуля, получаемое известными методами решение – неустойчиво. Матрицы базисных функций с указанными свойствами часто встречаются в задачах обработки сигналов в геофизической разведке (электро-, магнито-, сейсморазведка), спектрометрии (гамма-спектрометрия), медицинской диагностике (визуализация, томография) и др. Поэтому актуальна разработка устойчивых и вычислительно эффективных методов преобразования выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом.

В данной статье предложен подход к устойчивому решению задачи преобразования выхода, основанный на использовании усеченного сингулярного разложения [2–5].

Постановка задачи

Пусть имеется линейная система, вектор выхода которой \mathbf{b} формируется путем линейного преобразования входного вектора (входа) \mathbf{x} и добавления аддитивного шума как $\mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}$. Например, это может быть измерительная система, где дискретно заданный сигнал объекта измерения \mathbf{x} неизвестен, \mathbf{b} – наблюдаемый выход («сигнальный образ» \mathbf{x}), матрица \mathbf{A} описывает взаимодействие сигнала со средой и/или особенности измерительных средств (детектора, преобразователя сигнала и

др.). Столбцы \mathbf{A} можно рассматривать как отсчеты дискретно заданных базисных функций линейной системы.

Набор базисных функций \mathbf{A} отражает свойства конкретной измерительной системы, т.е. не может быть произвольным. Соответственно, наблюдаемый выход \mathbf{b} , определяемый базисными функциями \mathbf{A} , может не соответствовать требованиям пользователя, либо несовместим с методами последующей обработки. С другой стороны, если известен набор базисных функций \mathbf{C} , которые дали бы выход с требуемыми свойствами, можно поставить задачу нахождения преобразования наблюдаемого выхода \mathbf{b} в выход системы C с базисом \mathbf{C} .

Будем искать преобразование выхода как линейное преобразование. Для случая, когда известен вектор шума и его ковариационная матрица не вырождена, а также не вырождена матрица базисных функций \mathbf{A} , взвешенная ковариационной матрицей шума, в [1] предложено получать искомое преобразование с использованием обращения \mathbf{A} . Однако, если \mathbf{A} имеет высокое число обусловленности и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает к нулю, получаемое с использованием обратной матрицы решение (результат преобразования в выход системы C) неустойчиво, что проявляется в соответствии малым изменениям \mathbf{b} больших изменений решения. Ошибка решения велика.

Матрицы базисных функций с указанными свойствами часто встречаются в задачах обработки сигналов в геофизической разведке (электро-, магнито-, сейсмо-, гравиразведка), спектрометрии (например, гамма-спектрометрия), медицинской диагностике (визуализация, томография) и др. Для получения устойчивого решения в таких случаях требуется использовать регуляризацию [2]. В данной статье предложен подход к устойчивому решению задачи преобразования выхода, основанный на использовании усеченного сингулярного разложения [3–5].

Задача преобразования выхода

Пусть сигнал \mathbf{b} получен с выхода линейной системы A , выполняющей преобразование

$$\mathbf{Ax} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^m$, и

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_0. \quad (2)$$

Обозначим как \mathbf{d}_0 выход линейной системы C , выполняющей преобразование

$$\mathbf{Cx} = \mathbf{d}_0. \quad (3)$$

Для получения решения – оценки выхода системы C по \mathbf{b} – сначала получим оценку \mathbf{x}' входа \mathbf{x} , решив обратную задачу:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Pb}, \quad (4)$$

где \mathbf{P} – оператор (матрица), преобразующий выход \mathbf{b} в \mathbf{x}' .

Затем получим оценку выхода системы C :

$$\mathbf{d}' = \mathbf{Cx}' = \mathbf{CPb} = \mathbf{Tb}. \quad (5)$$

Таким образом, оператор \mathbf{CP} преобразует \mathbf{b} в \mathbf{d}' . Матрицу преобразования $\mathbf{T} = \mathbf{CP}$ в [1] называют матрицей редукции.

Конкретный вид \mathbf{P} зависит от свойств матрицы \mathbf{A} . Если ряд собственных чисел \mathbf{A} спадает монотонно и число обусловленности велико, то задачу относят к классу дискретных некорректных задач [6]. Приближенные решения дискретных некорректных задач как задач наименьших квадратов с использованием численных методов линейной алгебры (Холецкого, разложения LU , QR) – неустойчивы. Это означает, что малые возмущения во входных данных приводят к большим возмущениям в решении.

Проиллюстрируем ситуацию, в которой возможно применение метода преобразования выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом, на примере гамма-спектрометрических измерительных систем. Допустим, что детектор линейной измерительной системы A имеет более низкую разрешающую способность, чем детектор системы C .

Дискретно заданные функции отклика детектора (базисные функции), формирующие матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C} приведены на рис. 1,а. Выходы \mathbf{b} и \mathbf{d} приведены на рис. 1,б. Используя метод преобразования выхода линейной системы, выход системы A (обладающей меньшей разрешающей способностью) можно преобразовать в выход системы C (обладающей большей разрешающей способностью).

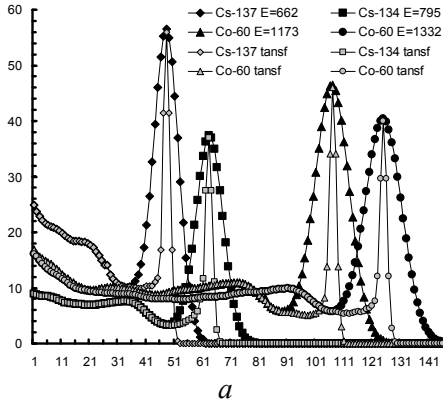


Рис. 1. *a* – дискретно заданные базисные функции, формирующие матрицы \mathbf{A} и \mathbf{C}

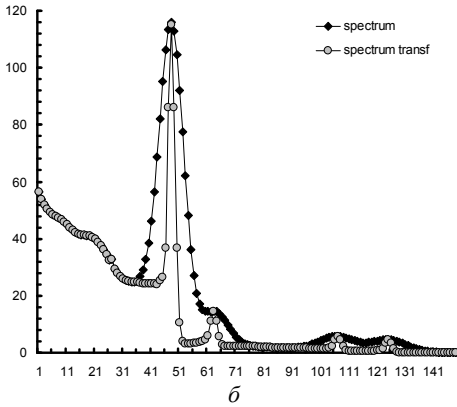


Рис. 1. *б* – выходы систем \mathbf{A} и \mathbf{C} : \mathbf{b} и \mathbf{d}

Преобразование вектора выхода на основе сингулярного разложения

Разрабатываемый подход к устойчивому решению задачи преобразования выхода основан на усеченном сингулярном разложении. Для устойчивого регуляризованного решения при вычислении оператора $\mathbf{C}\mathbf{P}$ (5) в качестве \mathbf{P} используем матрицу, получаемую так:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{V} \text{diag} \left(\frac{\varphi_i}{\sigma_i} \right) \mathbf{U}^T, \text{ при } i \leq k \quad \varphi_i = 1, \\ \text{иначе } \varphi_i = 0. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{A}_k = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ – приближение матрицы \mathbf{A} ($m \times n$), полученное по k ($k < n$) компонентам сингулярного разложения, $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ – матрица левых сингулярных векторов, $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ – матрица правых сингулярных векторов, $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ – матрица сингулярных чисел.

Оценка выхода системы \mathbf{C} , полученная с использованием k компонент сингулярного разложения \mathbf{A} , есть:

$$\mathbf{d}'_k = \mathbf{C}\mathbf{A}_k^+ \mathbf{b} = \mathbf{T}_k \mathbf{b}, \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}_k^+ = \mathbf{C}\mathbf{V} \text{diag} \left(\frac{\varphi_i}{\sigma_i} \right) \mathbf{U}^T \mathbf{d}'_k. \quad (8)$$

Оптимальным числом компонент сингулярного разложения будем считать такое, при котором минимальна среднеквадратичная ошибка преобразования выхода:

$$e = E_\varepsilon \left\| \mathbf{d}'_k - \mathbf{d}_0 \right\|^2 = E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \mathbf{b} - \mathbf{d}_0 \right\|^2. \quad (9)$$

Выделим в выражении для среднеквадратичной ошибки преобразования выхода детерминированную и стохастическую составляющие. С учетом $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$, выражение (9) примет следующий вид:

$$e = E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \mathbf{b} - \mathbf{d}_0 \right\|^2 = E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0 \right\|^2 + \\ + E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 + 2E_\varepsilon \langle \mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0, \mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (10)$$

Поскольку $E_\varepsilon \langle \mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0, \mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$,

$$e = E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \mathbf{b} - \mathbf{d}_0 \right\|^2 = \left\| \mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0 \right\|^2 + E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2. \quad (11)$$

Рассмотрим поведение стохастической и детерминированной составляющих ошибки преобразования выхода в зависимости от числа компонент сингулярного разложения (6).

Зависимость стохастической составляющей ошибки преобразования выхода от числа компонент сингулярного разложения

Исследуем зависимость величины стохастической составляющей ошибки преобразования выхода от числа компонент сингулярного разложения матрицы \mathbf{A} . Стохастическая составляющая ошибки преобразования выхода это:

$$E_\varepsilon \left\| \mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} \right\|^2 = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k) = \sigma^2 \text{trace}(\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}_k^+).$$

Запишем выражение для $\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k$ в рекурсивном виде. Для этого, воспользовавшись свойством цикличности следа произведения матриц [7] $\text{trace}(\mathbf{ABC}) = \text{trace}(\mathbf{BCA}) = \text{trace}(\mathbf{CAB})$, перепишем выражение $\mathbf{A}_k^{+T} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}_k^+$ как $\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^+$ и получим:

$$\text{trace}(\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k) = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_k), \quad (12)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$, $\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+T}$.

С целью исследования зависимости стохастической составляющей ошибки от k запишем выражение для \mathbf{M}_k в рекурсивном виде. Эта запись следует из свойств сингулярного разложения:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \quad \mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \sigma_i^{-1} \mathbf{u}_i^T, \\ \mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{u}_k^T. \quad (13)$$

Подставив \mathbf{A}_k^+ из (13) в выражение для \mathbf{M}_k получим

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+T} = \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{A}_{k-1}^{+T} + \\ + 2\mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T + \mathbf{v}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T. \quad (14)$$

Представив \mathbf{A}_{k-1}^+ с использованием сингулярного разложения и учитывая, что $\mathbf{U}_{k-1}^T \mathbf{u}_k = 0$ в силу ортогональности \mathbf{u}_k и \mathbf{u}_{k-1} , получим $2\mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T = \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1}^{-1} \mathbf{U}_{k-1}^T \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T = 0$. Заменяя в (14) $\mathbf{A}_k^+ \mathbf{A}_k^{+T}$ на \mathbf{M}_{k-1} и учитывая, что $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k = 1$, получим рекурсивное выражение для \mathbf{M}_k следующего вида:

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{v}_k \sigma_k^{-2} \mathbf{v}_k^T. \quad (15)$$

Умножив (15) слева на \mathbf{H} , получим рекурсивное выражение для $\text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_k)$:

$$\text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_k) = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{H}\mathbf{v}_k \sigma_k^{-2} \mathbf{v}_k^T) = \\ = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_{k-1}) + \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{v}_k \sigma_k^{-2} \mathbf{v}_k^T). \quad (16)$$

Вынеся константу σ_k^{-2} за оператор следа и переупорядочив $\mathbf{H}\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$ как $\mathbf{v}_k^T \mathbf{H}\mathbf{v}_k$ (по свойству цикличности), получим окончательное рекурсивное выражение для $\text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_k)$:

$$\text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_k) = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_{k-1}) + \sigma_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^T \mathbf{H}\mathbf{v}_k) = \\ = \text{trace}(\mathbf{H}\mathbf{M}_{k-1}) + \sigma_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{v}_k). \quad (17)$$

Выражение $\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{v}_k$ в (17) – положительная величина, поэтому $\sigma_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{v}_k) > 0$. Из выражения (17) и положительности $\sigma_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^T \mathbf{C}^T \mathbf{C}\mathbf{v}_k)$ следует, что стохастическая составляющая ошибки преобразования выхода возрастает с ростом k .

Зависимость детерминированной составляющей ошибки преобразования выхода от числа компонент сингулярного разложения

Рассмотрим зависимость величины детерминированной составляющей ошибки $\|\mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0\|^2$ от числа компонент сингулярного разложения матрицы \mathbf{A} . Заменяя \mathbf{d}_0 на $\mathbf{C}\mathbf{A}^+ \mathbf{b}_0$ и учитывая, что $\mathbf{T}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}_k^+$, получим следующее выражение для детерминированной составляющей ошибки преобразования выхода:

$$\|\mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0\|^2 = \|\mathbf{C}\Delta\mathbf{A}_k^+ \mathbf{b}_0\|^2, \quad (18)$$

где $\Delta\mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+$.

С целью исследования зависимости детерминированной составляющей ошибки от k , запишем выражение для $\Delta\mathbf{A}_k^+$ в рекурсивном виде. Такая запись для $\Delta\mathbf{A}_k^+$ следует из свойств сингулярного разложения (13) и имеет вид

$$\Delta\mathbf{A}_k^+ = \Delta\mathbf{A}_{k-1}^+ - \mathbf{v}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{u}_k^T. \quad (19)$$

Подставив (19) в $\mathbf{C}\Delta\mathbf{A}_k^+ \mathbf{b}_0$ и возведя в квадрат, получим рекурсивное выражение для детерминированной составляющей ошибки:

$$\|\mathbf{C}\Delta\mathbf{A}_k^+ \mathbf{b}_0\|^2 = \|\mathbf{C}\Delta\mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{b}_0\|^2 - \delta, \quad (20)$$

где

$$\delta = 2(\mathbf{b}_0^T \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}\Delta\mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{b}_0 - \\ - \mathbf{b}_0^T \mathbf{u}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{v}_k^T \mathbf{H}\mathbf{v}_k \sigma_k^{-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{b}_0).$$

Из последнего выражения видно, что:

- при $\delta > 0$ квадрат нормы $\|\mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0\|^2$ будет убывать с ростом k ;
- при $\delta < 0$ квадрат нормы $\|\mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0\|^2$ будет возрастать.

Знак δ зависит от конкретного \mathbf{b}_0 . Рассмотрим случай, когда вектор \mathbf{b}_0 представлен реализацией случайного процесса ξ ($\mathbf{b}_0 = \xi$) с нормальным законом распределения, нулевым средним и дисперсией v^2 . В этом случае усреднение можно провести по реализациям ξ .

Усредним $\|\mathbf{C}\Delta\mathbf{A}_k^+ \xi\|^2$ по реализациям случайного процесса

$$E_\varepsilon \left\| \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\xi} \right\|^2 = v^2 \text{trace}(\Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}} \mathbf{H} \Delta \mathbf{A}_k^+). \quad (21)$$

Для исследования зависимости $E_\varepsilon \left\| \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\xi} \right\|^2$ от k , запишем выражение (21) в рекурсивном виде. Для этого, воспользовавшись свойством цикличности следа произведения матриц, получим:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \left\| \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\xi} \right\|^2 &= v^2 \text{trace}(\Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}} \mathbf{H} \Delta \mathbf{A}_k^+) = \\ &= v^2 \text{trace}(\mathbf{H} \Delta \mathbf{A}_k^+ \Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}}) = v^2 \text{trace}(\mathbf{N}_k), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\mathbf{N}_k = \mathbf{H} \Delta \mathbf{A}_k^+ \Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}}$. Используя (19), запишем рекурсивное выражение для $\Delta \mathbf{A}_k^+ \Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}}$:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A}_k^+ \Delta \mathbf{A}_k^{+\text{T}} &= \Delta \mathbf{A}_{k-1}^+ \Delta \mathbf{A}_{k-1}^{+\text{T}} + \\ &+ \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}} - 2 \Delta \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{u}_k^{\text{T}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставив (23) в выражение для \mathbf{N}_k , запишем рекурсивное выражение

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_{k-1} + \mathbf{H} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}} - 2 \Delta \mathbf{A}_{k-1}^+ \mathbf{E}_k, \quad (24)$$

где $\mathbf{E}_k = \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{u}_k^{\text{T}}$. Используя $\Delta \mathbf{A}_{k-1}^+$ из (19) и учитывая, что $\Delta \mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=k+1}^N \mathbf{E}_i$, получим выражение вида

$$\Delta \mathbf{A}_{k-1}^+ = \mathbf{E}_k + \sum_{i=k+1}^N \mathbf{E}_i. \quad (25)$$

Подставив (25) в (24) с учетом, что $\mathbf{E}_k \mathbf{E}_k^{\text{T}} = \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}}$, получим для \mathbf{N}_k выражение

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_{k-1} + \mathbf{H} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}} - 2 \mathbf{H} \sum_{i=k+1}^N \mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^{\text{T}}. \quad (26)$$

В силу ортогональности сингулярных векторов $\mathbf{E}_i \mathbf{E}_k^{\text{T}} = 0$, выражение для \mathbf{N}_k примет вид

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_{k-1} - \mathbf{H} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}}. \quad (27)$$

Подставив (26) в (22), получим рекурсивное выражение для детерминированной составляющей ошибки:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \left\| \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\xi} \right\|^2 &= v^2 \text{trace}(\mathbf{N}_{k-1}) - \\ &- v^2 \text{trace}(\mathbf{H} \mathbf{v}_k \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \mathbf{v}_k^{\text{T}}). \end{aligned} \quad (28)$$

После вынесения константы $\boldsymbol{\sigma}_k^{-2}$ за оператор следа и переупорядочения $\mathbf{H} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^{\text{T}}$ по свойству цикличности выражение для детерминированной составляющей ошибки примет вид

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \left\| \mathbf{C} \Delta \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\xi} \right\|^2 &= \\ &= v^2 \text{trace}(\mathbf{N}_{k-1}) - v^2 \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{H} \mathbf{v}_k) = \\ &= v^2 \text{trace}(\mathbf{N}_{k-1}) - v^2 \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{v}_k). \end{aligned} \quad (29)$$

В выражении (29) $\mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{v}_k > 0$, поэтому и $v^2 \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{v}_k) > 0$.

Из рекурсивного выражения (29) и положительности $v^2 \boldsymbol{\sigma}_k^{-2} \text{trace}(\mathbf{v}_k^{\text{T}} \mathbf{C}^{\text{T}} \mathbf{C} \mathbf{v}_k)$ следует, что (в случае, когда вектор \mathbf{b}_0 представлен реализацией случайного процесса) детерминированная составляющая ошибки преобразования выхода убывает с ростом k .

Факт возрастания стохастической и убывания детерминированной составляющих ошибки преобразования выхода с ростом k говорит о том, что при определенном соотношении составляющих ошибка преобразования выхода может иметь минимум при $k < N$. В этом случае число компонент сингулярного разложения в (8) необходимо выбирать таким, чтобы ошибка преобразования выхода была минимальна.

Чтобы выбрать размерность k проекционной матрицы, при которой ошибка решения близка к минимальной в реальных условиях, т.е. когда точное решение неизвестно, предлагаем [5] использовать критерии выбора модели [8–10], используемые для выбора оптимальных моделей в области машинного обучения, индуктивного обучения и анализа данных.

Для практического применения метода преобразования выхода должны быть оговорены условия его применимости. В противном случае можно было бы, используя метод преобразования выхода, преобразовать имеющуюся (измеренную) функцию в произвольную. Исследованию условий применимости метода посвящен следующий раздел.

Условия применимости метода преобразования выхода

Исследование [4] показало, что ошибка преобразования выхода, в числе прочего, зависит от того, насколько различны базисы линейных систем A и C . Для отражения этого различия введем матрицу \mathbf{D} разности бази-

сов (разности между базисными функциями \mathbf{A} и \mathbf{C}): $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{C}$.

Используя матрицу разности базисов, покажем, что вектор ошибки преобразования выхода $\mathbf{e} = \mathbf{d}'_k - \mathbf{d}_0$ представим в виде суммы вектора ошибки (\mathbf{e}_{inv}) решения обратной задачи по восстановлению истинного сигнала выхода системы \mathbf{A} и вектора ошибки (\mathbf{e}_D), связанного с разницей базисов $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{inv} + \mathbf{e}_D$.

Запишем выражение (8) для \mathbf{T}_k с учетом $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$

$$\mathbf{T}_k = (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{A}_k^+ = \mathbf{A}\mathbf{A}_k^+ - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+. \quad (30)$$

Получим выражение для детерминированной составляющей ошибки преобразования (18), включающее в себя матрицу разности базисов. В выражении для детерминированной составляющей ошибки (18) обозначим вектор $\mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0 = \mathbf{e}_d$. В выражении для \mathbf{e}_d , заменив \mathbf{T}_k на выражение (30) и \mathbf{d}_0 – на (3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_d &= \mathbf{T}_k \mathbf{b}_0 - \mathbf{d}_0 = (\mathbf{A}\mathbf{A}_k^+ - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0 - \mathbf{C}\mathbf{x} = \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{A}_k^+ - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0 - (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (31)$$

После раскрытия скобок в (31) и группировки слагаемых, включающих в себя матрицу разности базисов, получим выражение для детерминированной составляющей вектора ошибки преобразования:

$$\mathbf{e}_d = (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0 + \mathbf{D}(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0. \quad (32)$$

Получим выражение для стохастической составляющей вектора ошибки преобразования (12), содержащее матрицу разности базисов. В выражении для стохастической составляющей ошибки обозначим вектор $\mathbf{T}_k \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}_s$. Учитывая, что $\mathbf{T}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}_k^+$ и $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$, выражение для \mathbf{e}_s примет следующий вид:

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (33)$$

Общее выражение для вектора ошибки

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{e}_d + \mathbf{e}_s = (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0 + \\ &+ \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0 - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (34)$$

Известно, что решение обратной задачи по восстановлению сигнала входа \mathbf{x}' системы \mathbf{A} с использованием зашумленного вектора выхода

$(\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 + \boldsymbol{\varepsilon})$, есть $\mathbf{x}' = \mathbf{P}\mathbf{b}$. Соответственно, оценка вектора выхода будет $\mathbf{b}' = \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{b}$.

Ошибка решения

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{inv} &= \mathbf{b}' - \mathbf{b}_0 = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b}_0 = \\ &\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b}_0 = (\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (35)$$

Конкретный вид \mathbf{P} зависит от свойств матрицы \mathbf{A} . Когда ряд собственных чисел \mathbf{A} спадает монотонно и число обусловленности велико, то

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_k^+ = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \sigma_i^{-1} \mathbf{u}_i^T. \quad (36)$$

Вектор ошибки решения обратной задачи восстановления сигнала выхода есть:

$$\mathbf{e}_{inv} = (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0 + \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (37)$$

Сопоставив выражение для вектора ошибки преобразования выхода (34) и выражение для ошибки решения обратной задачи (37), видим, что вектор ошибки преобразования выхода можно представить как сумму ошибки решения обратной задачи и ошибки, связанной с разностью базисов ($\mathbf{e}_D = \mathbf{D}(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0 - \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}$). С учетом $\mathbf{e} = \mathbf{e}_{inv} + \mathbf{e}_D$ выражение для ошибки (9) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} e &= E_\varepsilon \left\| \mathbf{d}'_k - \mathbf{d}_0 \right\|^2 = E_\varepsilon \left\| \mathbf{e}_{inv} + \mathbf{e}_D \right\|^2 = \\ &= E_\varepsilon \left\| \mathbf{e}_{inv} \right\|^2 + E_\varepsilon \left\| \mathbf{e}_D \right\|^2 + 2E_\varepsilon \langle \mathbf{e}_{inv}, \mathbf{e}_D \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая, что $E_\varepsilon [((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0)^T (\mathbf{D}\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon})] = 0$ и $E_\varepsilon [(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0] = 0$, выражение для $2E_\varepsilon \langle \mathbf{e}_{inv}, \mathbf{e}_D \rangle$ имеет вид

$$\begin{aligned} 2E_\varepsilon \langle \mathbf{e}_{inv}, \mathbf{e}_D \rangle &= 2E_\varepsilon [((\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ - \mathbf{I}) \mathbf{b}_0)^T \times \\ &\times \mathbf{D}(\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}_k^+) \mathbf{b}_0 - (\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}\mathbf{A}_k^+ \boldsymbol{\varepsilon}]. \end{aligned} \quad (39)$$

При использовании метода необходимо учитывать, что, когда $E_\varepsilon \langle \mathbf{e}_{inv}, \mathbf{e}_D \rangle > 0$, ошибка преобразования выхода e не меньше ошибки решения обратной задачи по восстановлению истинного сигнала выхода системы \mathbf{A} .

Когда принимается решение о необходимости преобразования выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом, часто решение обратной задачи по восстановлению истинного сигнала выхода системы \mathbf{A} уже

имеется. Если при этом ошибка решения обратной задачи велика, то от применения преобразования выхода следует отказаться, так как это приведет к дополнительному нарастанию ошибки.

Отметим также, что чем больше различие между базисными функциями A и C , тем больше составляющая $E_\varepsilon \|e_D\|^2$, а соответственно и ошибка преобразования выхода.

Эксперимент

Проведено исследование зависимости ошибки преобразования выхода от числа компонент сингулярного разложения. Столбцы матриц A и C содержат m отсчетов радиальных базисных функций: $f_n(z) = \exp(-g(z-c)^2)$, $c = dn + b$, ($d = 5$, $b = 20$), $z = \{1, 5, 10, \dots, 100\}$, n – номер базисной функции. Для исходной линейной системы $g = 0,05$. На рис. 2 приведены ряды сингулярных чисел матриц. Компоненты вектора x в экспериментах были: $x_5 = 1$, $x_6 = 0,5$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 0,26$, $x_{12} = 0,26$, другие компоненты вектора x – нулевые. Векторы b_0 , d_0 получены как Ax , Cx соответственно. В качестве шума использована случайная величина с гауссовым распределением и среднеквадратичным отклонением (уровень шума) $\{0,0125; 0,00625; 0,003125\}$. На рис. 3–5 для трех уровней шума приведена зависимость ошибки e от k для системы C при $g = \{0,3; 0,2; 0,1\}$.

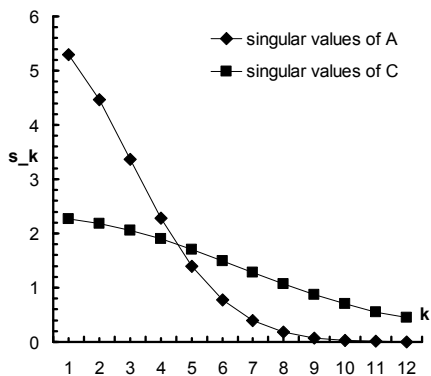


Рис. 2. Ряды сингулярных чисел матриц A и C

Видно, что для метода преобразования выхода на основе сингулярного разложения зависимость e от k имеет минимум при $k < n$.

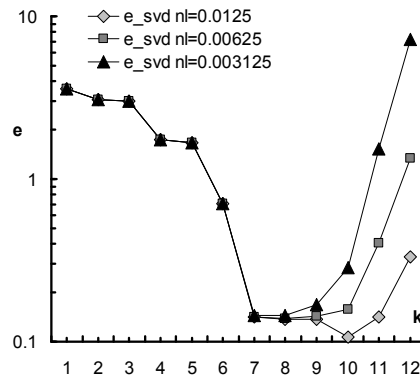


Рис. 3. Зависимость величины ошибки от числа компонент сингулярного разложения для системы C с $g = 0,3$

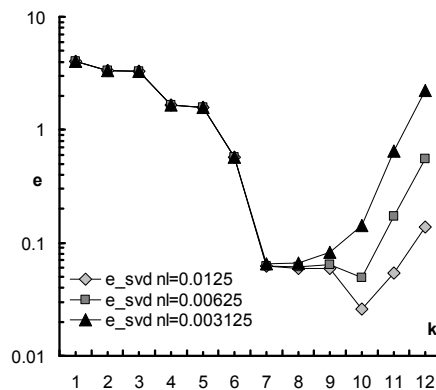


Fig. 4. Зависимость величины ошибки e от числа компонент сингулярного разложения k для системы C с $g = 0,2$

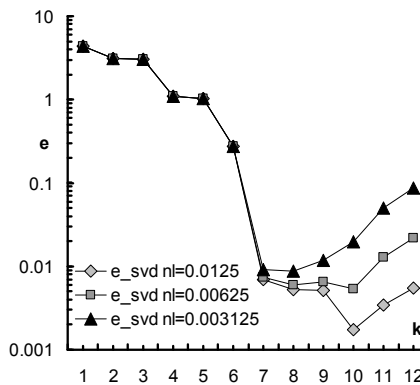


Fig. 5. Зависимость величины ошибки e от числа компонент сингулярного разложения k для системы C с $g = 0,1$

С ростом уровня шума положение минимума смещается в область меньших значений k , а ошибка в точке минимума растет. Ошибка в точке минимума растет также с ростом различия между базисными функциями линейных систем A и C .

Заключение. Предложенный метод позволяет для линейной системы, вектор выхода которой формируется путем линейного преобра-

зования входа и добавления аддитивного шума отыскать преобразование наблюдаемого выхода в выход линейной системы, для которой известен набор базисных функций, дающих выход с требуемыми свойствами.

Метод обеспечивает устойчивое преобразование выхода линейной системы в выход системы с заданным базисом для случая, когда матрица базисных функций исходной линейной системы имеет высокое число обусловленности и ряд ее сингулярных чисел плавно спадает к нулю.

Для среднеквадратичной ошибки решения задачи преобразования выхода проведено разложение на детерминированную и стохастическую составляющие. Анализ зависимости стохастической составляющей ошибки от числа компонент сингулярного разложения k показал, что эта составляющая возрастает с ростом k . Анализ зависимости детерминированной составляющей ошибки от k для случая, когда вектор \mathbf{b}_0 представлен реализацией случайного процесса ξ , показал, что эта составляющая убывает с ростом k .

Исследование условий применимости метода показало, что чем больше различие между базисными функциями \mathbf{A} и \mathbf{C} , тем больше ошибка преобразования выхода. При использовании метода необходимо учитывать, что вектор ошибки восстановления сигнала представлен как сумма ошибки решения обратной задачи по восстановлению сигнала \mathbf{b}_0 и ошибки, вносимой разницей базисов. Сформулировано условие, при котором ошибка преобразования выхода e не меньше ошибки решения обратной задачи по восстановлению истинного сигнала выхода системы A .

Исследование предложенного метода показало, что в рассмотренной задаче соотношение детерминированной и стохастической составляющих ошибки таково, что ошибка преобразо-

вания выхода имеет минимум. С возрастанием уровня шума положение минимума ошибки смещается в область меньших значений k , и значение ошибки в точке минимума возрастает.

Для дальнейших исследований можно избрать разработку критерия определения оптимального числа компонент сингулярного разложения, обеспечивающего минимальную ошибку преобразования выхода.

1. *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. – М.: Высш. шк., 1989. – 351 с.
2. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
3. *Ревунова Е.Г.* Повышение точности оценки вектора параметров путем преобразования линейной системы к системе с заданными свойствами // Индуктивное моделирование сложных систем. – 2011 – **3**. – С. 165–173.
4. *Revunova E.G., Rachkovskij D.A.* Stable Transformation of a Linear System Output to the Output of System with a Given Basis by Random Projections // The 5th Int. Workshop on Inductive Modelling (IWIM'2012), Kyiv. – 2012. – **1**. – P. 37–41.
5. *Ревунова Е.Г., Забулонов Ю.Л.* Исследование составляющих ошибки для решения задачи редукции измерений с использованием сингулярного разложения // Сб. научн. тр. ИПМЭ НАН Украины «Моделирование и информационные технологии». – 2012. – № 63. – С. 71–81.
6. *Hansen P.C.* Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion. – Philadelphia: SIAM, 1998. – 247 p.
7. *Гантмахер Ф.П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 287 с.
8. *Mallows C.L.* Some comments on C_p // Technometrics. – 1973. – **15**, № 4. – P. 661–675.
9. *Akaike H.* A new look at the statistical model identification // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – **19**, № 6. – P. 716–723.
10. *Hansen M., Yu B.* Model selection and minimum description length principle // J. Amer. Statist. Assoc. – 2001. – **96**. – P. 746–774.

Поступила 20.09.2012
Тел. для справок: +38 044 292-5588 (Киев)
E-mail: helab@i.com.ua
© Е.Г. Ревунова, 2013