

В.Н. Старков, А.С. Политыло

Исследование нестационарного энергообмена двух лазерных пучков в нелинейных средах методами вычислительной физики

Исследована математическая модель нестационарной перекачки энергии двух лазерных пучков в оптически нелинейной среде. Показано, что время полного энергообмена двух лазерных пучков в средах с локальным нелинейным откликом с учетом времени его релаксации и глубина нелинейной среды, на которой произошел полный энергообмен, связаны обратно пропорциональной зависимостью.

A mathematical model of the non-stationary transfer of energy between two laser beams in the optically non-linear medium is investigated. It is shown that time of full energy exchange of the two laser beams in the media with a local nonlinear response with the account of the time of its relaxation and the depth of a nonlinear medium at which a complete energy exchange took place are connected by the inversely proportional dependence.

Досліджено математичну модель нестационарного перекачування енергії двох лазерних пучків в оптично нелінійному середовищі. Показано, що час повного енергообміну двох лазерних пучків в середовищах з локальним нелінійним відгуком з урахуванням часу його релаксації і глибина нелінійного середовища, на якій відбувся повний енергообмін, пов'язані обернено пропорційною залежністю.

Введение. Задача взаимодействия двух лазерных пучков в нелинейной среде непосредственно связана с фундаментальной проблемой исследования управления светом с помощью света. Эффект нестационарной перекачки энергии (НПЭ) от пучка с большей интенсивностью излучения к пучку с меньшей интенсивностью достаточно полно изучался [1–4]. Так в работе [3] рассматривалось взаимодействие двух сопутствующих волн в среде с нелинейностью генерационного типа, когда добавка диэлектрической проницаемости зависит от интенсивности света $|E(r, t)|^2$ локально по пространству, и во времени меняется по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon(r, t) &= \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(r, t), \\ \delta\varepsilon(r, t) &= \eta \int_0^t |E(r, \tau)|^2 d\tau, \quad \eta = \eta^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Математическая модель сформулированной физической задачи в виде системы трех дифференциальных квазилинейных уравнений в частных производных [3] сведена путем введения новой независимой автомодельной переменной к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение которой получали стандартным методом Рунге–Кутты. Возникающая при этом проблема погрешности и устойчивости численного решения не обсуждается. Аналитические выражения получены для линеаризованной вблизи двух тривиальных ре-

шений системы. Одно из них соответствует симметричным краевым условиям (на входе два пучка с одинаковой интенсивностью), а второе – отсутствию на входе какого-либо из пучков.

В статье исследуется ситуация, когда изменение нелинейной диэлектрической проницаемости во времени описывается более сложным соотношением в сравнении с (1), а именно:

$$\delta\varepsilon(r, t) = \eta \int_0^t |E(r, \tau)|^2 \exp[(\tau - t)/T] d\tau, \quad (2)$$

т.е. рассматриваются среды с локальным, но инерционным нелинейным откликом (среды с инерционной кубической нелинейностью). Кроме того, для изучения НПЭ в условиях (2) в отличие от варианта математической модели [3] в виде задачи Коши для системы дифференциальных квазилинейных уравнений в частных производных используется аппарат нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра [5–7]. Преимущество предложенного в статье алгоритма решения нелинейного интегрального уравнения состоит в том, что его программное воплощение эффективно в компьютерной реализации.

Сформулированная проблема актуальна, поскольку ряд вопросов, касающихся свойств НПЭ в средах с инерционной кубической нелинейностью, остались открытыми. В частности, неизвестен характер траекторий, по которым про-

исходит изменение энергии пучков, неизвестно соотношение между толщиной кристалла и временем перекачки и т.д. Поэтому детальное исследование нестационарного энергообмена двух лазерных пучков в указанных средах остается перспективным.

Постановка задачи

Если изменение нелинейной диэлектрической проницаемости представить в виде (2), то для двух волн, сходящихся под углом 2ϑ , задача Коши определения плавных амплитуд

$$A_m(z, t) = \sqrt{I_m(z, t)} \exp[i\phi_m(z, t)],$$

$$A_m(z, t) \in C^{(1,0)}((0, Z) \times [0, T]) \cap C([0, Z])$$

и амплитуды решетки диэлектрической проницаемости

$$\Delta\varepsilon(z, t) \in C^{(0,1)}([0, Z] \times (0, T]) \cap C([0, Z] \times [0, T])$$

формулируется так [1, 2]:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -ik \Delta\varepsilon A_2, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = -ik \Delta\varepsilon^* A_1,$$

$$\frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial t} = \eta A_1 A_2^* - \frac{\Delta\varepsilon}{T}, \quad z, t > 0, \quad (3)$$

$$A_m(z=0, t) = A_{m0}(t) \in C[0, T],$$

$$\Delta\varepsilon(z, t=0) = \Delta\varepsilon_0(z) \in C[0, Z], \quad (4)$$

где η – параметр нелинейности; T – время релаксации; E – амплитуда суммарного электрического поля световой волны; $k = 0,5k_0 / \cos \vartheta$; $k_0 = 2\pi / \lambda$ – волновое число.

Решение задачи

Используя закон сохранения

$$|A_1(z, t)|^2 + |A_2(z, t)|^2 = I_0(t),$$

где $I_0(t)$ – входная интенсивность, произведем замену неизвестных функций по формулам:

$$A_1(z, t) = \sqrt{I_0(t)} \sin[u(z, t) / 2] \exp[i\phi_1(z, t)],$$

$$A_2(z, t) = \sqrt{I_0(t)} \cos[u(z, t) / 2] \exp[i\phi_2(z, t)],$$

$$w(z, t) = 2A_1(z, t)A_2^*(z, t) / I_0(t) = \sin u(z, t) \exp[i\phi(z, t)], \quad (5)$$

$$\phi(z, t) = \phi_1(z, t) - \phi_2(z, t).$$

Введение функции $w(z, t)$, связанной с амплитудой картины интерференции $A_1(z, t)A_2^*(z, t)$

соотношением (5), позволяет свести задачу (3)–(4) к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра [5, 6].

$$w(z, t) = w_0(t) - ik\eta \int_0^z \int_0^t I_0(\tau) \sqrt{1 - |w(x, t)|^2} \cdot w(x, \tau) \exp[(\tau - t) / T] d\tau dx, \quad (6)$$

где $w_0(t) = w(z=0, t) = 2A_{10}(t)A_{20}^*(t) / I_0(t)$.

Наряду с компактностью и четкой физической интерпретацией такая модель позволяет достаточно просто получить приближенное решение задачи. Знание функции $w(z, t)$ дает возможность в свою очередь определить разность фаз $\phi(z, t)$

$$\phi(z, t) = -i \ln \left[\frac{w(z, t)}{|w(z, t)|} \right], \quad (7)$$

интенсивности $I_m(z, t) = |A_m(z, t)|^2$ ($m = 1, 2$),

$$I_1(z, t) = I_0(t) \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\arcsin |w(z, t)|) \right],$$

$$I_2(z, t) = I_0(t) \cos^2 \left[\frac{1}{2} (\arcsin |w(z, t)|) \right] \quad (8)$$

и амплитуду решетки диэлектрической проницаемости

$$\Delta\varepsilon(z, t) = \frac{1}{2} \eta \int_0^t I_0(\tau) w(z, \tau) \exp[(\tau - t) / T] d\tau. \quad (9)$$

Очевидно, решение нелинейного интегрального уравнения (6) в явном виде не представляется возможным. Поэтому для теоретического обоснования метода численного решения этого уравнения рассмотрим сходное, но более простое интегральное уравнение:

$$u(z, t) = u_0(t) - \alpha \int_0^z \int_0^t \sqrt{1 - u^2(x, \tau)} \cdot u(x, \tau) \exp[(\tau - t) / T] d\tau dx, \quad (10)$$

где $u(z, t)$ – вещественная функция действительных переменных z и t , $\alpha > 0$.

Решение уравнения (10) находим на шаре, радиуса ρ , т.е. $|u(z, t)| \leq \rho = 1 - \Delta$; $0 < \Delta < 1$.

Запишем исследуемое уравнение в виде

$$u(z, t) = u_0(t) - \alpha \int_0^z \int_0^t f(u) \exp[(\tau - t) / T] d\tau dx,$$

где $f(u) = u\sqrt{1 - u^2}$, причем $|f(u)| \leq \frac{1}{2}$,

$$|f'(u)| = \left| \frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} = L.$$

В соответствии с теоремой о конечном приращении имеем

$$f(u_2) - f(u_1) = f'(\bar{u})(u_2 - u_1),$$

так что условие Липшица по u принимает вид

$$|f(u_2) - f(u_1)| \leq L|u_2 - u_1|. \quad (11)$$

Наличие условия (11) позволяет сформулировать достаточные условия, при которых в уравнении $\psi = B u$ оператор B , определяемый выражением:

$$B u \equiv u_0(t) - \alpha \int_0^z \int_0^t f(u) \exp[(\tau - t)/T] d\tau dx,$$

является сжимающим. Действительно,

$$\begin{aligned} |Bu_1 - Bu_2| &= \left| \alpha \int_0^z \int_0^t [f(u_1) - f(u_2)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp[(\tau - t)/T] d\tau dx \right| \leq \\ &\leq \alpha \int_0^z \int_0^t |f(u_1) - f(u_2)| \exp[(\tau - t)/T] d\tau dx \leq \\ &\leq \alpha z L T \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right) \max_{z,t} |u_1(z,t) - u_2(z,t)|. \end{aligned}$$

Теорема. Если выполняется неравенство

$$\alpha z L T \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right) < 1,$$

то оператор B – сжимающий и последовательные приближения $u_n = B u_{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$) при любом начальном элементе $|u_0| \leq \rho$ сходятся к единственному решению u^* уравнения (10).

При разработке алгоритма численного решения уравнения (6) необходимым условием проверки достоверности его программной реализации является наличие тестового примера нахождения искомой функции [8].

В качестве примера приближенного решения уравнения (6) в аналитической форме на первом этапе построены итерации $w_1(z, t)$ и $w_2(z, t)$, когда за нулевое приближение для простоты преобразований принималась функция (рис. 1)

$$w_0(z, t) = w_0(t) = 2\sqrt{y(1-y)}, \quad y = \exp(-t/2T). \quad (12)$$

Исходные данные задачи: волновое число – $k = 6 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, интенсивность света – $I_0 = 5 \cdot 10^7 \text{ Вт/см}^2$, параметр нелинейности – $\eta = 6 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{Вт}$, время релаксации – $T = 10^{-6} \text{ с}$, $\rho = k \cdot \eta \cdot I_0 = 180 \text{ см}^{-1}$, $z \in [0; 0, 2] \text{ м}$, $t \in [0; 1, 386 \cdot 10^{-6}] \text{ с}$.

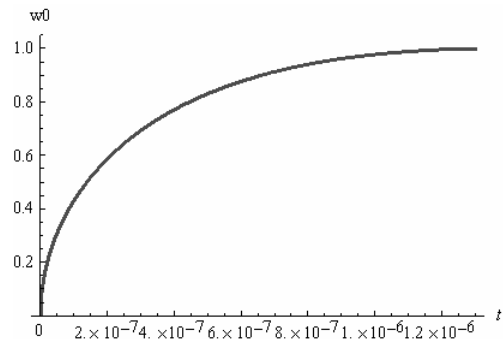


Рис. 1

Входной функции $w_0(t)$ (12) на границе среды отвечают такие распределения интенсивностей лазерных пучков (рис. 2):

$$\begin{aligned} I_{10}(t) &= I_0 \sin^2 \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin 2\sqrt{y(1-y)} \right) \right], \\ I_{20}(t) &= I_0 \cos^2 \left[\frac{1}{2} \left(\arcsin 2\sqrt{y(1-y)} \right) \right]. \end{aligned}$$

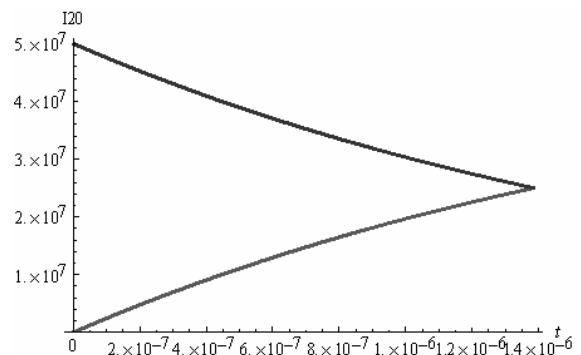


Рис. 2

На рис. 3 изображена поверхность изменения действительной части второй итерации искомой функции $w_2(z, t)$. Обращает на себя внимание явно выраженный след от впадины на этой поверхности. Физически это означает наличие границы двух зон – зоны осуществимости перекачки энергии от одного пучка к другому (выше границы раздела) и зоны отсутствия

полной перекачки (ниже границы раздела). Такой вывод следует из анализа результатов численного решения уравнения (6).

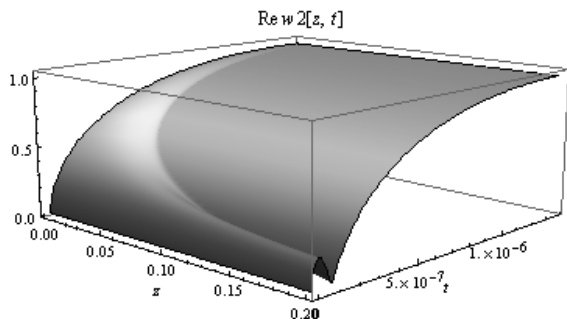


Рис. 3

На втором этапе разработан алгоритм численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (6) в области $(z, s) \in ([0, 2] \times [0, 180])$ с данными (рис. 4)

$$w_0(t) = \begin{cases} 0,6, & \text{если } t \in [0, T], \\ 0, & \text{если } t \in (T, \infty). \end{cases} \quad (13)$$

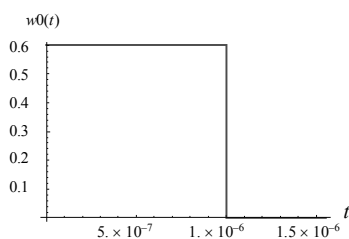


Рис. 4

Эти данные соответствуют следующему распределению интенсивностей в начальный момент времени $I_{10}(z, t=0) = 0, 1I_0$, $I_{20}(z, t=0) = 0, 9I_0$ (рис. 5).

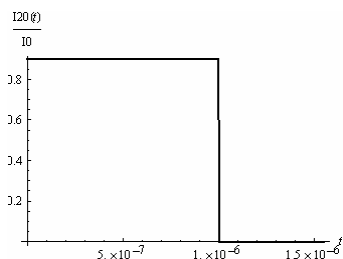


Рис. 5

При построении алгоритма используются такие обозначения:

$$v(z, t) = w(z, t) - w_0(t); \quad s = \rho t;$$

$$u(z, s) = \int_0^s v(z, \xi) \exp[(\xi - s) / (\rho T)] d\xi;$$

$$u_0(s) = \int_0^s w_0(\xi) \exp[(\xi - s) / (\rho T)] d\xi. \quad (14)$$

Конструкция предложенного в статье алгоритма численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра (6) в области $(z, s) \in ([0, 2] \times [0, 180])$ может быть представлена на основе доказанной теоремы в виде итерационной последовательности:

$$v_0(z, s) = \tilde{v}_0(z, s) \equiv 0,$$

$$v_{m+1}(z, s) = -i \int_0^z (u_0(s) + \tilde{u}_m(x, s)) \times$$

$$\times \sqrt{1 - |w_0(s) + \tilde{v}_m(x, s)|^2} dx,$$

$$\tilde{u}_m(z, s) = \int_0^s \tilde{v}_m(z, \xi) \exp[(\xi - s) / (\rho T)] d\xi,$$

$$\tilde{v}_{m+1}(z, s) = 0,5 * (v_{m+1}(z, s) + v_m(z, s)), \quad (15)$$

$$m = 0, 1, \dots,$$

при условии, что

$$|w_0(s) + \tilde{v}_m(x, s)| < 1 - \Delta, \quad (16)$$

где Δ – малая величина ($0 < \Delta < 1$).

Сходимость итерационного процесса контролировалась вычислением значений $\|\tilde{v}_{m+1}(z_0, s) - \tilde{v}_m(z_0, s)\|$ (z_0 – толщина кристалла).

На рис. 6–9 представлены результаты программной реализации алгоритма (15–16). Так на рис. 6 изображены кривые изменения во времени относительных интенсивностей $I_m(z_0, t) / I_0$, где ($m = 1, 2$) для различной толщины кристалла ($z_0 = 0,12; 0,15; 0,20$).

На рис. 7 дается изображение поверхности, которая описывается функцией $|w(z, t)|$, реконструированной с помощью алгоритма (15–16).

Обращает на себя внимание четко наблюдаемая граница выхода функции на значения $|w(z, t)| = 1$, иначе говоря, в зону полной перекачки энергии. Представляет интерес тот факт, что эта граница аналогична следу от впадины поверхности рис. 3, полученной аналитически для иных исходных данных. Еще более контрастно такая граница фиксируется на поверхности $I_1(z, t) / I_0 = \sin^2 \left[\frac{1}{2} (\arcsin |w(z, t)|) \right]$ (рис. 8).

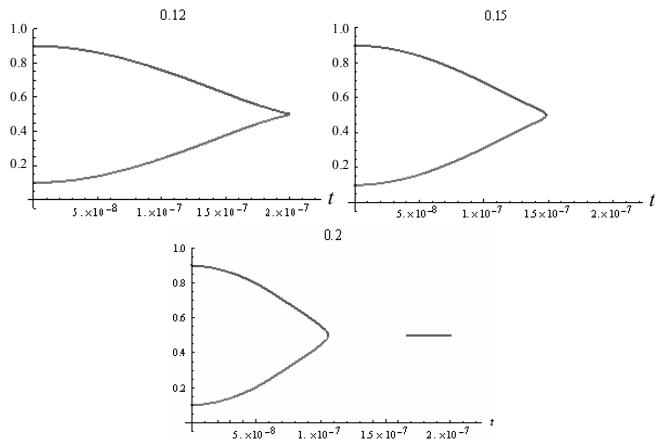


Рис. 6

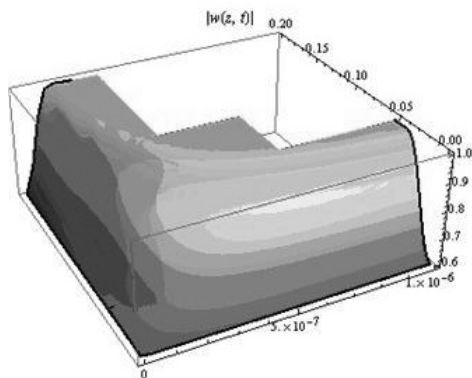


Рис. 7

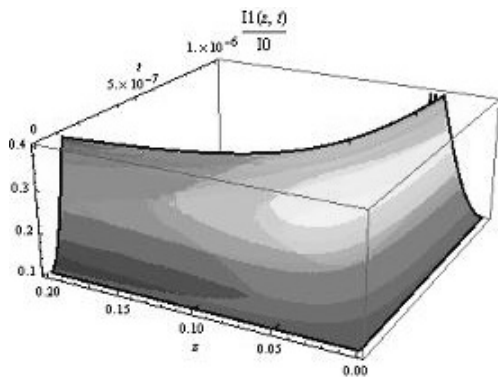


Рис. 8

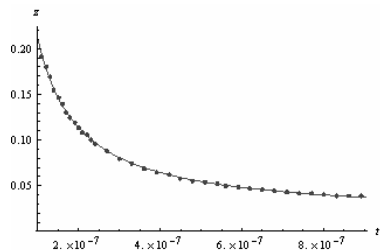


Рис. 9

В результате проведенных расчетов выяснилось, что указанная граница является гиперболой (рис. 9), уравнение которой имеет вид $(5,13051 \times 10^7 t_0 - 0,0426429) \times (z_0 - 0,0155161) = 1$.

Заключение. Основной результат выполненной работы можно сформулировать в виде следующего положения: время полного энергообмена двух лазерных пучков в средах с локальным нелинейным откликом с учетом времени его релаксации и глубина нелинейной среды, на которой произошел полный энергообмен, связаны обратно пропорциональной зависимостью, т.е. $\alpha t_0 - \beta = \frac{1}{z_0 - a}$.

1. *Динамическая самодифракция когерентных световых пучков* / В.Л. Винецкий, Н.В. Кухтарев, С.Г. Одулов и др. // УФН. – 1979. – **129**, № 1. – С. 113–137.
2. *Винецкий В.Л., Кухтарев Н.В., Семенец Т.И.* Кинетика динамической самодифракции световых пучков в объемных средах с локальным откликом // Квантовая электроника. – 1981. – **8**, № 1. – С. 217–220.
3. *Зельдович Б.Я., Лернер П.Б., Немкова Е.А.* Нестационарный энергообмен двух попутных когерентных волн в нелинейной среде // Там же. – 1987. – **14**, № 12. – С. 2502–2508.
4. *Антипов О.Л., Хазанов И.В.* Об автомодельных решениях нелинейной задачи нестационарного попутного вынужденного рассеяния света // Изв. вузов, Радиофизика. – 1987. – **XXX**, № 1. – С. 49–55.
5. *Старков В.Н.* Нелинейные интегральные уравнения в задачах динамической голографии // Тез. доп. Міжнар. конф. «Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань». – К.: Ін-т математики НАН України. – 1997. – С. 165–166.
6. *Борщ А.А., Бродин М.С., Старков В.Н.* Новая математическая модель нестационарного двухпучкового энергообмена при записи просветных динамических голограмм // Квантовая электроника. – 1997. – **24**, № 11. – С. 1027–1029.
7. *Старков В.Н.* Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. – К.: Наук. думка, 2002. – 264 с.
8. *Методы вычислительной физики решения нелинейного интегрального уравнения в задаче исследования двухпучкового лазерного взаимодействия* / А.А. Борщ, М.М. Бродин, А.С. Политыло и др. // Питання оптимізації обчислень. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2007. – С. 40–41.

Поступила 10.06.2009
Тел. для справок: (044) 464-3224, 525-7924 (Киев)
E-mail: starkov@iop.kiev.ua
© В.Н. Старков, А.С. Политыло, 2009